

5.2.1 Formula di Cauchy–Hadamard

Data una serie di potenze (5.23) di centro x_0 , sia³³

$$R^{-1} := \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}. \quad (5.24)$$

Allora, la serie (5.23) converge assolutamente se³⁴ $x = x_0$ o se $|x - x_0| < R$ e non converge se $|x - x_0| > R$.

Dimostrazione L'idea è di applicare il criterio della radice generalizzato (§ 5.1.4) alla serie (5.23) o, equivalentemente, alla serie numerica $\sum |a_n|r^n$ con $r = |x - x_0| \geq 0$. Sia dunque $r = |x - x_0|$, $M_r := \overline{\lim} (|a_n|r^n)^{\frac{1}{n}}$ e $M := \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = R^{-1}$. Per il Lemma 5.19, $M_r = rM$ e quindi, $M_r < 1 \iff |x - x_0| < R$, e, $M_r > 1 \iff |x - x_0| > R$. La tesi segue quindi dal criterio della radice generalizzato. ■

Tale $R \in [0, +\infty]$ prende il nome di *raggio di convergenza* della serie (5.23).

Osservazione 5.21 (i) Si noti che il raggio di convergenza R è l'unico elemento di $[0, +\infty]$ tale che, se $r < R$, $\sum |a_n|r^n < +\infty$ e, se $r > R$, $|a_n|r^n \geq 1$ per infiniti n . Quindi,

$$R = \sup \{r \geq 0 \mid \sum |a_n|r^n < \infty\}.$$

(ii) (**Criterio del rapporto per serie di potenze**) Se $\lim |a_{n+1}/a_n| = s \in [0, +\infty]$, allora la serie di potenze $\sum a_n(x - x_0)^n$ ha raggio di convergenza³⁵ $R = s^{-1}$.

Infatti, applicando il criterio del rapporto alla serie $\sum |a_n|r^n$ segue che se $r < s^{-1}$ tale serie converge, mentre se $r > s^{-1}$ la serie non converge (non essendo infinitesima). Ma, per il punto (i), questo significa che $s^{-1} = R$.

(iii) Da (i) segue anche che $R > 0$ se e solo se esistono $c, M \in (0, +\infty)$ tali che

$$|a_n| \leq cM^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0; \quad (5.25)$$

infatti, se $R > 0$ e $0 < r < R$, allora da (i) segue che $c := \sum |a_n|r^n < +\infty$ e quindi vale la (5.25) con $M := 1/r$; viceversa, se vale (5.25), allora $\sum |a_n|r^n < +\infty$ per ogni $0 < r < 1/M$.

5.2.2 Regolarità delle serie di potenze

Se $R > 0$ è il raggio di convergenza della serie (5.23) di centro x_0 , chiameremo *intervallo (o dominio) di convergenza* della serie (5.23), l'intervallo $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ (tale intervallo coincide con \mathbb{R} se $R = +\infty$). Quindi, le serie di potenze (5.23) definiscono una funzione $f(x)$ per $x \in I$: infatti, tale funzione f è di classe $C^\infty(I)$. La dimostrazione di questa affermazione si basa sul seguente lemma, interessante di per sé.

Lemma 5.22 Sia I un intervallo di \mathbb{R} e siano $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che, se $M_n := \sup_I |u_n|$ e $M'_n := \sup_I |u'_n|$, le serie $\sum M_n$ e $\sum M'_n$ convergano. Allora, la funzione $x \in I \mapsto \sum u_n(x)$ definisce una funzione f derivabile su I e si ha che $f'(x) = \sum u'_n(x)$ per ogni $x \in I$.

³³Qui vale la convenzione: $R = +\infty \iff R^{-1} = 0$, $R = 0 \iff R^{-1} = +\infty$. Si noti che $R > 0$ se e solo se $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} < +\infty$.

³⁴Se $x = x_0$, la (5.23) è la serie banale con un solo termine dato da a_0 (e quindi, "converge" banalmente).

³⁵Con la solita convenzione che $s^{-1} = +\infty$ se $s = 0$ e $s^{-1} = 0$ se $s = +\infty$.

Dimostrazione Poiché $\sum M_n < +\infty$, la serie $\sum u_n(x)$ converge assolutamente per ogni $x \in I$ e definisce una funzione $x \in I \mapsto f(x)$. Fissiamo $x \in I$ e sia $h \neq 0$ tale che $x+h \in I$. Per il teorema del valor medio di Lagrange (applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$, che è interamente contenuto in I), per ogni n esiste $t_n \in (0, 1)$ tale che

$$\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} = u'_n(x + t_n h). \quad (5.26)$$

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\sum M'_n < +\infty$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n>N} M'_n < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5.27)$$

Per $h \neq 0$ tale che $x+h \in I$, si consideri la funzione

$$g(h) := \sum_{n=1}^N \left(\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} - u'_n(x) \right).$$

Poiché le funzioni u_n sono derivabili, si ha che $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$, quindi, esiste $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $|g(h)| < \varepsilon/2$ per $0 < |h| < \delta$. Per tali h si ha, dunque, che

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum u'_n(x) \right| &= \left| g(h) + \sum_{n>N} \left(\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} - u'_n(x) \right) \right| \\ &\stackrel{(5.26)}{=} \left| g(h) + \sum_{n>N} u'_n(x + t_n h) - u'_n(x) \right| \\ &\leq |g(h)| + 2 \sum_{n>N} M'_n \stackrel{(5.27)}{<} \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Da questo lemma segue facilmente la seguente

Proposizione 5.23 *Sia $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ e intervallo di convergenza I . Allora $f \in C^\infty(I)$. Inoltre, per ogni $k \geq 1$, la derivata di ordine k di f , $f^{(k)}$, è la serie di potenze con stesso intervallo di convergenza I data*

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x-x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(n+k)!}{n!} (x-x_0)^n, \quad (x \in I), \end{aligned} \quad (5.28)$$

e, in particolare,

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k, \quad \forall k \geq 0. \quad (5.29)$$

Dimostrazione A meno di una traslazione nelle x possiamo assumere che $x_0 = 0$. È anche chiaro che basta dimostrare la proposizione nel caso $k = 1$, poiché il caso generale

segue immediatamente per iterazione (o induzione). Assumiamo quindi $x_0 = 0$ e $k = 1$, nel qual caso la (5.28) diviene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n. \quad (5.30)$$

Dalla caratterizzazione del raggio di convergenza³⁶ la serie di potenze $\sum a_n n x^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum a_n n x^n$ e poiché $\lim n^{1/n} = 1$, dal Lemma 5.19-(iii) e dalla formula di Cauchy–Hadamard per il raggio di convergenza, segue che la serie di potenze in (5.30) ha raggio di convergenza R . Per $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ la (5.30) segue, ora, dal Lemma 5.22 con $u_n(x) := a_n(x - x_0)^n$, $I = (-r, r)$ e $|x| < r < R$. ■

Si noti che se due serie di potenze $\sum a_n(x - x_0)^n$ e $\sum b_n(x - x_0)^n$ coincidono su un intervallo, esse definiscono un'unica funzione f su tale intervallo e dunque dalla (5.29) segue che $a_n = b_n$ per ogni n .

Come conseguenza della Proposizione 5.23 possiamo calcolare facilmente le primitive di una serie di potenze:

Corollario 5.24 *Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora, la serie di potenze $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x - x_0)^n$ ha raggio di convergenza R e soddisfa $F' = f$ sul dominio di convergenza e $F(x_0) = 0$.*

Dimostrazione Poiché $n^{1/n} \rightarrow 1$, il raggio di convergenza di F è R e chiaramente $F(x_0) = 0$. Per la Proposizione 5.23, F è derivabile e la sua derivata coincide con f (sul dominio di convergenza). ■

³⁶Chiaramente, $\{r \geq 0 \mid \sum |a_n| r^n < +\infty\} = \{r \geq 0 \mid \sum |a_n| r^{n-1} < +\infty\}$.