Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

- (1) $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, $\dot{x} = Dx = \frac{d}{dt}x$. $(a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$
- Definiamo l'"operatore differenziale" $L : x \in C^2(I) \mapsto Lx \in C(I)$ come segue $(Lx)(t) = a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t)$. Quindi l'equaz. diff. (1) è equivalente a $\boxed{Lx = 0}$ (2)
- Se $x(t) = u(t) + iv(t) \in \mathbb{C}$ $\quad Lx = 0 \Leftrightarrow Lu + iLv = 0$ $\Leftrightarrow Lu = 0$, e $Lv = 0$.
- Quindi se cerchiamo soluzioni della forma $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha $Lx = P(\lambda)x$ con $P(\lambda) = \underline{\text{polinomio caratteristico}} = a\lambda^2 + b\lambda + c$ e $Lx = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ ovvero $\lambda = \lambda_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si hanno dunque tre casi.

(i) $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_- < \lambda_+ < 0$ e due soluzioni $e^{\lambda_+ t}$ e $e^{\lambda_- t}$.
Poiché l'equazione è lineare se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni allora anche $Ax_1(t) + Bx_2(t)$ è soluzione ($\forall A, B \in \mathbb{R}$) essendo $L(Ax_1 + Bx_2) = ALx_1 + BLx_2 = 0$. Quindi la "soluzione generale" in questo caso è data da $\boxed{Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}}$

(ii) $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\mu \pm \omega$, $\mu := b/2a$, $\omega = \sqrt{-\Delta}/2a$
$\Rightarrow e^{\lambda_\pm t} = e^{-\mu t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ è sol. $\Rightarrow e^{-\mu t}\cos\omega t$ e $e^{-\mu t}\sin\omega t$ sono sol.
$\Rightarrow$ la soluzione generale è data da $\boxed{e^{-\mu t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}$

(iii) $\Delta = 0$. In questo caso $P(\lambda) = a(\lambda - \lambda_0)^2$ con $\lambda_0 = -\mu = -\frac{b}{2a}$
$\Rightarrow e^{-\mu t}$ è una soluzione, e l'altra?
Osservazione: $Le^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t} = a(\lambda - \lambda_0)^2 e^{\lambda t}$ e questa identità vale $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Derivando rispetto a λ otteniamo
$L(te^{\lambda t}) = a\left(2(\lambda - \lambda_0)e^{\lambda t} + (\lambda - \lambda_0)^2 te^{\lambda t}\right)$ e se poniamo $\lambda = \lambda_0$ otteniamo $L(te^{\lambda t}) = 0 \Rightarrow$ anche $te^{\lambda t}$ è soluzione!
Quindi la soluzione generale in questo caso è $\boxed{(A + Bt)e^{-\mu t}}$.

Es1. $D_t = \frac{d}{dt}$, $D_\lambda = \frac{d}{d\lambda} \Rightarrow D_t D_\lambda e^{\lambda t} = D_\lambda D_t e^{\lambda t}$.

Es2. Risolvere il problema di Cauchy $Lx = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ e studiare il grafico della soluzione nei seguenti casi: (i) $a = 1, b = 5, c = 4$; $x_0 = 1$, $v_0 = -4$. (ii) stessi a, b, c, $x_0 = -1$, $v_0 = 7$ (iii) $a = b = c = 1$, $x_0 = 1$, $v_0 = -1$. (iv) $a = c = 1, b = 3$, $x_0 = 0$, $v_0 = 2$. (v) $b = 2, c = 1$, $x_0 = 1$, $v_0 = 11$.

Regolarità delle soluzioni e unicità

Il problema di Cauchy (PC) per $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0$ consiste nel trovare una soluzione $C^2(I)$, $I=[-T,T]$, che soddisfi i "dati iniziali" $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=v_0$.
Poniamo $a=1$ per semplicità. Se x è una soluzione C^2 di (1) su $I \Rightarrow \ddot{x}=-b\dot{x}-cx$

Oss. $\Rightarrow \dddot{x}=-b\ddot{x}-c\dot{x}\in C(I) \Rightarrow x\in C^3(I)$. etc $\Rightarrow$ $x\in C^\infty(I)$
Inoltre se $x(0)=x_0$ e $\dot{x}(0)=v_0$ la serie di Taylor di x in $t=0$, $\sum_{k\geq 0} a_k t^k$ è univocamente determinata:
$a_0=x_0$, $a_1=v_0$, $a_2=-\frac{ba_1-ca_0}{2}$, $a_3=-\frac{ba_2-ca_1}{3!}$, etc.

Infatti, si ha:

Prop. Se $x\in C^2(I)$ è soluzione di (1) $\Rightarrow$ x è analitica su $I=[-T,T]$). In particolare, (ovvia $x(t)=\sum_{k\geq 0} a_k t^k$ su I e tale soluzione è analitica su I.
$\exists!$ soluzione $x(t)$ di (PC) e tale soluzione è analitica su I.

Dim* Introduciamo le seguenti notazione: per una funzione $u(t)$ continua su $[-T,T]$ poniamo $\|u\|:=\sup_{|t|\leq T}|u(t)|$.
Sia $x(t)$ soluzione di (PC) e poniamo $\alpha:=\max\{1,\|x\|,\|\dot{x}\|\}$ e $A=\max\{1,|b|+|c|\}$. Facciamo vedere che $\forall n\in\mathbb{N}_0$ si ha $\|x^{(n)}\|\leq\alpha A^n$.
Per $n=0$, $\|x\|\leq\alpha \Rightarrow$ ok. Per $n=1$ $\|\dot{x}\|\leq\alpha\leq\alpha A \Rightarrow$ ok.
Assumiamo che $\|x^{(n)}\|\leq\alpha A^n$ con $n\geq 1$ e dimostriamo $\|x^{(n+1)}\|\leq\alpha A^{n+1}$:

$$\|x^{(n+1)}\|=\|-ax^{(n)}-bx^{(n-1)}\|\leq|a|\|x^{(n)}\|+|b|\|x^{(n-1)}\|\leq|a|\alpha A^n+|b|\alpha A^{n-1}$$
$$\leq\alpha(|a|+|b|)A^n\leq\alpha A\cdot A^n=\alpha A^{n+1}\Rightarrow \text{ok}.$$

Ma allora, dalla formula di Taylor con resto di Lagrange, $\forall |t|\leq T$,

$$|x(t)-T_{x,n}(t)|\leq\frac{\|x^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\leq\frac{\alpha A^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

$\Rightarrow x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k$ $\forall |t|\leq T$. Dall'osservazione segue la tesi. ∎

Mettendo assieme la discussione di pag 1 con la Proposizione, si ha:

Corollario Il Problema di Cauchy $a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0$ $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=v_0$ ha un'unica soluzione analitica su $\mathbb{R}$ della forma (i), (ii) o (iii) come descritto a pag. 1.