Secondo esonero – 8/6/2026

Nome, Cognome (STAMPATELLO): **Matricola:**

Per superare la prova è necessario ottenere almeno 25 punti nel primo esercizio. Motivare sempre le risposte.

Es 1 [Pt 40] (i) [20pt] Discutere la convergenza dell'integrale improprio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{|\log x|^{\sqrt{2}}}\ \operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\,dx$ (si faccia attenzione a tutti i punti singolari).

(ii) [10pt] Discutere l'uniforme continuità della funzione $f(x) := \dfrac{|\operatorname{sen}\pi x|}{\log x}\ \arctan\dfrac{1}{x}$ su $(0,1)$ e su $(1,+\infty)$.

(iii) [10pt] Calcolare limsup e liminf di $a_n = n^2 - \dfrac{n^4+1}{n^2-\sqrt{2}}\ \cos\big(\dfrac{n\pi}{2}\big)$.

Es 2 [Pt 20] Discutere la convergenza, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, dell'integrale improprio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{(x|\log x|)^\alpha}\,dx$.

Es 3 [Pt 15] Si consideri l'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \operatorname{sen} t$. (i) Si trovi una soluzione periodica.
(ii) Si determinino *tutte* le soluzioni (in termini dei valori iniziali in $t = 0$).
(iii) Si dimostri che esiste una soluzione $x_{\mathrm{p}}(t)$ tale che ogni altra soluzione $x(t)$ verifica $|x(t) - x_{\mathrm{p}}(t)| \to 0$ per $t \to +\infty$.

Es 4 [Pt 15] Calcolare limsup e liminf di $a_n = (-1)^{[n/2]} + \{n/2\}$.

Es 5 [Pt 10] Sia $I_n = \big[n, n + \frac{1}{n+1}\big)$ e sia $A = \bigcup_{n\geq 0} I_n$. Determinare $\overline{A}$, $\mathring{A}$ e ∂A.