Appello A – 18/6/2026

Nome, Cognome (STAMPATELLO): **Matricola:**

Per superare la prova è necessario ottenere almeno 25 punti nel primo esercizio. Motivare sempre le risposte! Scrivere la soluzione dell'Es 1 su questo foglio (possibilmente in ordine)

Es 1 [Pt 40] (i) [20pt] Sia $I_\alpha := \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,x^\alpha\right)}{(x-1)^\alpha}\,dx$. Discutere la convergenza di I_1 e, poi, la convergenza di I_α per ogni $\alpha \geq 0$.

(ii) [10pt] Discutere la convergenza delle serie: (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{10}+2^n\right)\cdot\tanh\left(\frac{1}{2^{n/2}}+\frac{1}{3^n}\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$.

(iii) [10pt] Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} - \cos x^2}{|\operatorname{sen} x|^\alpha}$ ha limite finito per $x \to 0$.

Es 2 [Pt 20] Discutere la convergenza, al variare di $x \in \mathbb{R}$, della serie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{x^{2n}+n^x}+\frac{n^x}{(\log n)^{n^x}}\right)$.

Es 3 [Pt 10] Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^4 = |z|$. [Suggerimento: usare la rappresentazione trigonometrica ma scrivere il risultato nella forma più semplice possibile]

Es 4 [Pt 15] (i) Si determini la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$ con dati iniziali $x(0)=1$ e $\dot{x}(0)=\alpha$. (ii) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste $T>0$ tale che $x(T)=0$.

Es 5 [Pt 15] (i) Sia $f(x) = \{x\}\{1-x\}$ e se ne disegni il grafico. (ii) Sia $a_n = f(n/5)$. Si determini $\mathscr{L}_{\{a_n\}}$, $\limsup a_n$ e $\liminf a_n$. (iii) Discutere l'uniforme continuità di f su $\mathbb{R}$.