

Nome, Cognome (STAMPATELLO):

Matricola:

Per superare la prova è necessario ottenere almeno 25 punti nel primo esercizio. Motivare sempre le risposte! Scrivere la soluzione dell'Es 1 su questo foglio (possibilmente in ordine: prima Es 1-(i), poi Es1-(ii), etc.)

**Es 1 [Pt 40]** (i) [20pt] Sia  $I_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha(x - \tanh x)}{(1+x)^2 \log^2(1+x)} dx$ . Discutere prima la convergenza per  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  e, poi, per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(ii) [10pt] Discutere la convergenza delle serie: (a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^{\sqrt{n}}}$ ; (b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n \log n}$ .

(iii) [10pt] Calcolare, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il limite  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1+\alpha x) - \alpha x + 1 - \cos x}{x - \tanh x}$ .

**Es 2 [Pt 20]** Discutere, al variare di  $x \in \mathbb{R}$ , la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[ (-1)^n \log \left( 1 + \frac{1}{n^x} \right) + \frac{1}{n^{3-x}(\log n)^2} \right].$$

**Es 3 [Pt 10]** (i) Dire quante soluzioni complesse distinte ha l'equazione  $z^4 = -(4\bar{z})^2$ .

(ii) (facoltativo) Determinare la parte immaginaria di tutte le soluzioni.

**Es 4 [Pt 15]** (i) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ .

(ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy  $\ddot{x} + \dot{x} = e^{-t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ , e calcolare  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ .

**Es 5 [Pt 15]** Discutere, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'uniforme continuità di  $x \in (0, +\infty) \mapsto x^\alpha \sin(1/x^2)$