

$L$ , dato che se ce ne fossero due si dovrebbero sovrapporre. Consideriamo ora quelli di lunghezza compresa tra  $L/4$  e  $L/2$ ; di questi, per la stessa ragione, ce ne possono essere al massimo 3. Continuando, ci sono al più  $2^s - 1$  intervalli di lunghezza compresa tra  $L/2^s$  e  $L/2^{s-1}$ . Al variare di  $s$  tra 1 e  $\infty$  si trovano tutti gli insiemi  $J_x$ , che dunque sono in numero finito (se l'estremo inferiore delle loro lunghezze è maggiore di zero) o al più costituiscono un'infinità numerabile. ■

### Esercizi

93. Completare la dimostrazione del teorema precedente considerando il caso che  $A$  non sia limitato.

Sia  $A$  un insieme di  $\mathbb{R}$ . Un punto  $x \in \mathbb{R}$  si dice *interno* ad  $A$  se esiste un intorno di  $x$  tutto contenuto in  $A$ ; si dice *esterno* se esiste un intorno di  $x$  che non interseca  $A$ . Un punto che non è né interno né esterno è evidentemente un punto della frontiera  $\partial A$ , dato che in ogni suo intorno cadono sia punti di  $A$  che del complementare  $CA$ .

Si chiama *parte interna* (o *interno*) di  $A$ , e si indica con  $A^\circ$ , l'insieme dei punti interni di  $A$ , ed *esterno* di  $A$  l'insieme dei punti esterni. In genere quest'ultimo non ha un simbolo che lo denoti (talvolta si indica con  $A^e$ , nel qual caso la parte interna si indica con  $A^i$ ), perché coincide con la parte interna di  $CA$ .

### Esercizi

Trovare i punti interni e i punti di frontiera degli insiemi  $E$  qui definiti:

94.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < -x\}$

95.  $(0, 1)$

96.  $[0, 1]$

97.  $(-\infty, 0]$

98.  $\left\{x = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$

99.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (2n-1, 2n)$

100.  $\left\{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}, q \leq 100\right\}$

101.  $\left\{x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}, q \text{ dispari}\right\}$

102.  $\mathbb{N}$

103.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2ax + b \leq 0\}$

104. Dimostrare che per ogni insieme  $A$  si ha  $A^\circ \cup (CA)^\circ \cup \partial A = \mathbb{R}$ .

105. Provare che, se  $\mathbb{Q}$  è l'insieme dei numeri razionali, si ha  $\mathbb{Q}^\circ = (C\mathbb{Q})^\circ = \emptyset$ , e  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

106. Provare che  $A^\circ$  è il massimo insieme aperto contenuto in  $A$ , ovvero l'unione di tutti gli insiemi aperti contenuti in  $A$ . Di conseguenza,  $A$  è aperto se e solo se  $A^\circ = A$ .

107. Dimostrare che  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

108. Sia  $A$  un insieme aperto. Dimostrare che  $\partial A$  non può avere punti interni.

109. Si può dire lo stesso se  $A$  è chiuso? E se non si fa nessuna ipotesi su  $A$ ?

110. Sia  $K$  un insieme chiuso. Dimostrare che esiste un insieme  $E$  tale che  $\partial E = K$ .

## 9 Numeri complessi

Ricordiamo che un numero complesso  $z$  si può scrivere sia in forma cartesiana:  $z = a + ib$ , sia in forma trigonometrica:  $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Le relazioni tra le coordinate trigonometriche  $\rho, \varphi$  e quelle cartesiane  $a, b$  sono date dalle formule

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\rho}$$

ovvero

$$a = \rho \cos \varphi; \quad b = \rho \sin \varphi.$$

Il numero  $\rho$  si chiama *modulo* di  $z$ , mentre l'angolo  $\varphi$ , che è definito a meno di multipli di  $2\pi$ , si dice *argomento* di  $z$ .

La forma trigonometrica è particolarmente adatta per eseguire prodotti (dunque anche rapporti, potenze e radici). Infatti, se  $z = \rho e^{i\varphi}$  e  $w = R e^{i\theta}$ , si ha

$$zw = \rho R e^{i(\varphi + \theta)}.$$

Risulta inoltre  $z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\rho}$ , e, tornando in coordinate cartesiane,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

### Esercizi

Mettere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

111.  $z = i$

112.  $z = -1 - i$

113.  $z = 1 + i$

114.  $z = i(1 + i)$

115.  $z = \frac{1+i}{1-i}$

116.  $z = \frac{1}{3+3i}$

86. La relazione è vera per  $n = 1$ . Se la si suppone vera per  $n$  si ha

$$(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \dots (1 - \mu_{n+1}) \geq [1 - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)](1 - \mu_{n+1}) = \\ = 1 - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + \mu_{n+1}) + \mu_{n+1}(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n),$$

da cui segue la tesi, poiché l'ultimo termine è positivo.

87. Risulta  $n!! = n(n-2)!! = n(n-2)(n-4)!! = \dots = n(n-2)(n-4) \dots 3 \cdot 1$  se  $n$  è dispari, ovvero  $n!! = n(n-2)(n-4) \dots 4 \cdot 2$  se  $n$  è pari. Per quanto riguarda la relazione  $(2n)!! = 2^n n!$ , essa è vera per  $n = 1$ . Se poi la si suppone vera per  $n$ , si ha  $(2(n+1))!! = (2n+2)(2n)!! = 2(n+1)2^n n! = 2^{n+1}(n+1)!$ , e quindi risulta vera per  $n+1$ .

88. L'asserzione è vera se  $N = 1$ , cioè se  $A$  ha un solo elemento; infatti in questo caso  $P(A)$  ha due elementi,  $\emptyset$  e  $A$ . Supponiamola ora vera per  $N$ , e sia  $A$  un insieme con  $N+1$  elementi. Sia  $x_0$  uno di essi, e sia  $B = A - \{x_0\}$ . Poiché  $B$  ha  $N$  elementi,  $P(B)$  ne avrà  $2^N$ . D'altra parte, ad ogni elemento  $Q \in P(B)$  corrispondono due elementi distinti di  $P(A)$ , precisamente  $Q$  stesso e  $Q \cup \{x_0\}$ . Ne segue che gli elementi di  $A$  sono il doppio di quelli di  $B$ , e dunque  $P(A)$  ha  $2^{N+1}$  elementi.

89. Se fosse  $\frac{\log_a A}{\log_a B} = \frac{n}{k}$ , ovvero  $k \log_a A = n \log_a B$ , si dovrebbe avere  $A^k = B^n$ , il che è impossibile, dato che  $A$  e  $B$  sono primi tra loro. Generalizzare.

90. Quando è iniettiva.

91. Detto  $J$  l'insieme dei numeri irrazionali, si ha  $\mathbb{R} = J \cup \mathbb{Q}$ , e dunque  $J$  non può essere numerabile, perché altrimenti, essendo  $\mathbb{Q}$  numerabile, lo sarebbe anche  $\mathbb{R}$ . Neanche l'intervallo  $(0, 1)$  è numerabile, perché altrimenti lo sarebbe ogni intervallo  $(k, k+1)$ , e dunque anche  $\mathbb{R}$ , che è unione numerabile di tali intervalli:  $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$ .

92. Le parole composte di  $n$  lettere sono ovviamente in numero finito. Ne segue che l'insieme delle parole, essendo costituito da un insieme numerabile di insiemi finiti, è esso stesso numerabile.

93. Consideriamo l'insieme  $Q_m$  degli intervalli  $J_x$  di lunghezza compresa tra  $\frac{1}{m}$  e  $m$ .

Di questi, solo un numero finito possono essere contenuti nell'intervallo  $[-s, s]$ , e dunque  $Q_m$  sarà numerabile, in quanto unione numerabile di insiemi finiti. Ne segue che tutti gli intervalli  $J_x$  limitati formano un insieme numerabile, poiché esso è unione numerabile di insiemi numerabili. Poiché al più due degli intervalli  $J_x$  possono essere illimitati, si ha la conclusione del teorema.

94.  $(-1, 0); \{-1, 0\}$

95.  $(0, 1); \{0, 1\}$

96.  $(0, 1); \{0, 1\}$

97.  $(-\infty, 0); \{0\}$

98.  $\emptyset; E \cup \{0\}$

99.  $E; \mathbb{N}$

100.  $\emptyset; E$

101.  $\emptyset; \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

102.  $\emptyset; \mathbb{N}$

$$103. \begin{cases} \emptyset; \emptyset & \text{se } a^2 < b \\ \emptyset; \{-a\} & \text{se } a^2 = b \\ (-a - \sqrt{a^2 - b}, -a + \sqrt{a^2 - b}); \{-a - \sqrt{a^2 - b}, -a + \sqrt{a^2 - b}\} & \text{se } a^2 > b \end{cases}$$

104. Se un punto  $x \in \mathbb{R}$  non appartiene ad  $A^\circ$ , in ogni intorno di  $x$  dovranno cadere punti di  $CA$ . Analogamente, se  $x$  non appartiene a  $(CA)^\circ$ , in ogni intorno di  $x$  cadranno punti di  $A$ . Se ora  $x$  non appartiene né ad  $A^\circ$  né a  $(CA)^\circ$ , in ogni intorno di  $x$  cadranno sia punti di  $A$  che di  $CA$ , e dunque  $x \in \partial A$ .

105. Né  $\mathbb{Q}$  né il suo complementare possono avere punti interni, dato che in ogni intervallo cadono sia punti razionali che irrazionali. Ne segue che  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

106. Sia  $x_0 \in A^\circ$ , e sia  $I(x_0, r) \subset A$ . Se  $x \in I(x_0, r/2)$ , risulta  $I(x, r/2) \subset I(x_0, r) \subset A$ , e dunque  $x \in A^\circ$ . Ne segue che  $A^\circ$  è un aperto contenuto in  $A$ . Sia ora  $E$  un aperto contenuto in  $A$ , e sia  $x \in E$ . Poiché  $E$  è aperto, esisterà un intorno  $I$  di  $x$  contenuto in  $E$ , e dunque a maggior ragione in  $A$ . Ne segue che  $x \in A^\circ$ , e dunque  $E \subset A^\circ$ .

107. Risulta  $C(\bar{A}) = (CA)^\circ$ ; infatti  $C(\bar{A})$  è aperto, e se  $B$  è un aperto contenuto in  $C(A)$ ,  $C(B)$  è un chiuso che contiene  $A$  e quindi  $\bar{A}$ . Ne segue che  $B \subset C(\bar{A})$ , e dunque quest'ultimo è il massimo aperto contenuto in  $C(A)$ . D'altra parte, per l'esercizio 104, si ha  $(CA)^\circ = C(A \cup \partial A)$ , e dunque  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

108. Se  $A$  è aperto risulta  $A \cap \partial A = \emptyset$ , e dunque  $\partial A \subset CA$ . Se ora si avesse  $x \in (\partial A)^\circ$ , esisterebbe un intorno di  $x$  tutto contenuto in  $\partial A$ , e dunque in  $CA$ . Ma allora in questo intorno di  $x$  non potrebbero cadere punti di  $A$ , e dunque non potrebbe essere  $x \in \partial A$ .

109. Sì, perché  $\partial A = \partial(CA)$  e  $CA$  è aperto. In generale il risultato non è vero; infatti, ad esempio,  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

110. Se  $K$  non ha punti interni, basterà prendere  $E = K$ . Se invece  $K$  ha punti interni, si può prendere ad esempio  $E = \partial K \cup (K^\circ \cap \mathbb{Q})$ . Infatti si ha  $\bar{E} = \partial K \cup (\bar{K}^\circ \cap \mathbb{Q}) = K$ . D'altra parte,  $E$  non ha punti interni; infatti se  $x \in \partial K$  in ogni intorno di  $x$  cadono punti di  $CK \subset CE$ , mentre se  $x \in K^\circ \cap \mathbb{Q}$  in ogni intorno di  $x$  cadono punti di  $K^\circ - \mathbb{Q}$ . Ne segue che  $E \subset \partial E$ , e dunque  $K = \bar{E} = E \cup \partial E = \partial E$ .

111.  $e^{i\frac{\pi}{2}}$

112.  $e^{i\pi}$

113.  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

114.  $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

115.  $e^{i\frac{\pi}{2}}$

116.  $\frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

117.  $e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

118.  $2e^{i\frac{\pi}{2}}$

119.  $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

120.  $4 (= 4e^{i0})$

121.  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

122.  $\frac{27}{16}e^{i\frac{3\pi}{2}}$

123.  $\sqrt{\frac{13}{5}}$

124.  $\sqrt{\frac{5}{2}}$

125.  $\sqrt{5}$

126.  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$