

Esercizi

Dire se convergono le serie seguenti:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n+2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n+1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n!}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\sin n)]^n$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\binom{2n}{n}}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{2^n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dove $a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ non è un cubo} \\ \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{se } k \text{ è un cubo} \end{cases}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1/n}$

Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le serie seguenti:

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x^n$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+n|x|^n)$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin x^n}{n+x^{2n}}$
23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^n}}{x^n}$
24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^n}$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x^n}{(1+x)^n}$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2nx}$
27. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n!}$
28. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} x^{2n+1}$
29. $\sum_{n=1}^{\infty} (nx^2)^{n^2 x}$
30. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+x}{1+nx}\right)^n$
31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+n}{1+n^3 x^2}$
32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x^2}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln nx}{1+n^2 x^2}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$
35. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{x^n}$
36. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x^n}}{1+x^n}$

$$37. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{nx}}{1+2^{nx}}$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^2 x}{n^2 + x^2}$$

$$39. \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sqrt{n}$$

$$40. \sum_{n=0}^{\infty} x^{nx} (x > 0)$$

$$41. \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin(n!x)$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(2x)^n}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt[3]{1 + \frac{x}{n}}$$

$$46. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln n}}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{nx}}{n!}$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x^2)^{nx}}{n!}$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n}}{n} + \frac{n^{2x}}{x}\right)$$

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{nx}}{(n!)^\alpha}$$

$$52. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{n!}$$

$$53. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3 + (\ln x)^{2n}}$$

$$54. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+e^{n^2 x}}$$

$$55. \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^{\sqrt{n}} (x \geq 0)$$

$$56. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(1+2^n)}{n^2 + x^{2n}}$$

$$57. \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^{n^\beta} (x \geq 0)$$

$$58. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + \sin \frac{x}{n}}{n^x}$$

Trovare la somma delle serie seguenti (Pietro Mengoli, *Novae quadraturae arithmeticae*, 1651):

$$59. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(an+b)(a(n+1)+b)}$$

$$60. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$61. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+7}}, \text{ dove } a_k = ak + b$$

$$62. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$63. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+s} - b_n}{b_n b_{n+1} \dots b_{n+s}}, \text{ dove } b_n \text{ è una successione crescente con } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

2 Ulteriori criteri di convergenza

Oltre ai teoremi dimostrati nelle *Lezioni* e riportati sopra, possono talvolta essere utili i criteri seguenti. Cominciamo con le serie a termini positivi.

Teorema 2.1 (Criterio del rapporto migliorato) *Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono due serie a termini positivi, e se da un certo ν in poi risulta*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

[2.1]

Risposte agli esercizi del capitolo quarto

- | | | |
|---|-------------------------|---|
| 1. Sì | 2. Sì | 3. Sì |
| 4. Sì | 5. Sì | 6. Sì |
| 7. Sì | 8. Sì | 9. Sì |
| 10. Sì | 11. No | 12. Sì |
| 13. Sì | 14. Sì | 15. Sì |
| 16. Sì | 17. Sì | 18. No |
| 19. $ x \neq 1$ | 20. $0 < x \leq 1$ | 21. $ x < 1$ |
| 22. $ x \neq 1$ | 23. $x > 1$ | 24. $ x < 1$ |
| 25. $\left\{x > -\frac{1}{2}\right\} \cup \{x < -2\}$ | 26. Mai | 27. $ x < 1$ |
| 28. $ x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ | 29. $x < 0$ | 30. $x \neq 0, -1/k (k \in \mathbb{N})$ |
| 31. $x \neq 0$ | 32. $x \neq 0$ | 33. $x > 0$ |
| 34. $-1 \leq x < 1$ | 35. Mai | 36. $x > 1$ |
| 37. $\{x < 0\} \cup \{x > 1\}$ | 38. $x > 0$ | 39. $ x < 1$ |
| 40. $0 < x < 1$ | | |
| 41. Sempre | 42. $ x > \frac{1}{2}$ | 43. $x < -1$ e $x \geq 1$ |
| 44. $x > 1$ | 45. $x > -1$ | 46. $ x > 1$ |
| 47. $x > e^2$ | 48. $x < 1$ | 49. $x < 1$ |
| 50. $-1 < x < -\frac{1}{2}$ | 51. $x < \alpha$ | 52. $ x \leq 1$ |
| 53. $\left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$ | 54. $x > 0$ | 55. $0 \leq x < 1$ |
| 56. $ x > 1$ | | |
57. Se $\alpha < -1$ e $\beta \leq 0$, la serie converge per ogni x .
 Se $\alpha < -1$ e $\beta > 0$, la serie converge per $0 \leq x \leq 1$.
 Se $\alpha \geq -1$ e $\beta \leq 0$, la serie converge solo per $x = 0$.
 Se $\alpha \geq -1$ e $\beta > 0$, la serie converge per $0 \leq x < 1$.

- | | | |
|--|--------------------|---|
| 58. $x = 0$ e $x > 1$ | 59. $\frac{1}{ab}$ | 60. $\frac{1}{12}$ |
| 61. $\frac{1}{7a} \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_6} = \frac{1}{7ab(b+a) \dots (b+6a)}$ | 62. $\frac{3}{4}$ | 63. $\frac{b^s - b_0 b_1 \dots b_{s-1}}{b^s b_0 b_1 \dots b_{s-1}}$ |