9 Numeri complessi

Ricordiamo che un numero complesso z si può scrivere sia in forma cartesiana: $z = a + ib$, sia in forma trigonometrica: $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Le relazioni tra le coordinate trigonometriche ρ, φ e quelle cartesiane a, b sono date dalle formule

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho}; \;\; \sin\varphi = \frac{b}{\rho}$$

ovvero

$$a = \rho\cos\varphi; \;\; b = \rho\sin\varphi.$$

Il numero ρ si chiama *modulo* di z, mentre l'angolo φ, che è definito a meno di multipli di 2π, si dice *argomento* di z.

La forma trigonometrica è particolarmente adatta per eseguire prodotti (dunque anche rapporti, potenze e radici). Infatti, se $z = \rho e^{i\varphi}$ e $w = Re^{i\vartheta}$, si ha

$$zw = \rho R e^{i(\varphi + \vartheta)}.$$

Risulta inoltre $z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\,\sin\varphi}{\rho}$, e, tornando in coordinate cartesiane,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\,\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Esercizi

Mettere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

111. $z = i$ **112.** $z = -1$ **113.** $z = 1 + i$

114. $z = i(1 + i)$ **115.** $z = \frac{1 + i}{1 - i}$ **116.** $z = \frac{1}{3 + 3i}$

117. $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$ **118.** $z = \frac{4i}{\sqrt{3}+i}$ **119.** $z = \frac{i(i-1)}{(i+1)^2}$

120. $z = (1+i)(2-2i)$ **121.** $z = \frac{2^8}{(-\sqrt{6}-i\sqrt{2})^5}$ **122.** $z = \frac{3}{\left(-1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^4}$

Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:

123. $1+i-\frac{i}{1-2i}$ **124.** $\frac{1}{1-i}+\frac{2i}{i-1}$ **125.** $\frac{3-i}{(1+i)^2}-\frac{1}{1-i}$

Calcolare z^2, z^6, z^{22} se

126. $z = \frac{2}{\sqrt{3}-i}+\frac{1}{i}$ **127.** $z = \frac{1}{(1-i)^2}-i$ **128.** $z = \frac{1-i}{i}$

Risolvere le seguenti equazioni:

129. $(z+i)^2 = (\sqrt{3}+i)^3$ **130.** $z^6+z^3+1=0$ **131.** $z^3 = |z|^2$

132. $z^2+i\bar{z}=1$ **133.** $z^2+i\sqrt{5}\,|z|+6=0$ **134.** $|z|^2+5z+10i=0$

135. $z^2+i\sqrt{3}z+6=0.$

136. Verificare che se $|z|=1$ si ha $\left|\frac{3z-i}{3+iz}\right|=1.$

137. Sapendo che $1+i$ è radice del polinomio $z^4-5z^3+10z^2-10z+4$, trovare le altre radici.