Naturalmente non si può usare direttamente il teorema di De l'Hôpital, dato che qui si ha a che fare con una successione. Si può però (*Lezioni*, cap. 3, Teorema 4.1) considerare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right),$$

che è della forma $0\cdot\infty$. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}(\ln x-1)=+\infty,$$

e dunque si avrà anche

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n}-1)=+\infty. \blacksquare$$

Esercizi

Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

127. $\lim_{x\to0}(1+x^m)^{1/x^k}$

128. $\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-x}-1}{x}$

129. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}$

130. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{A}-1\right)$

131. $\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$

132. $\lim_{x\to0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{3x}}$

133. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$

134. $\lim_{x\to0^+} x^x$

135. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos x+x^2}$

136. $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x}$

137. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

138. $\lim_{x\to+\infty}\left\{x-x^2\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)\right\}$

139. $\lim_{x\to0}\frac{(\arcsin x)^2+\ln(1-\sin^2 x)}{\cosh^2 x-1}$

140. $\lim_{x\to+\infty} 2^{\sin x}$

141. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\sin x}{1+\cos^2 x}$

142. $\lim_{x\to0}\frac{[\sqrt{1-\sin x}-\cos x]\sin x}{\left[\cos x-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}\right]\ln(1+x)}$

143. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x\operatorname{arctg} x)-e^{x^2}+1}{\sqrt{1+2x^4}-1}$

144. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$

145. $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\left[\operatorname{tg}(\pi x^2)+(2x-1)4^x+6x-4\right]\operatorname{cotg}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

146. $\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$

147. $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-(1-x^2)^2}\ln(1+2\sin x)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{x-\sin x}$

148. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln\cos x}$

149. $\lim_{x\to0}\frac{(\sinh x-\sin x)^2}{(\cosh x-\cos x)^3}$

150. $\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{1/x}-1}{x}$

151. $\lim_{x\to0^+}\left[\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}\right]^{\ln x}$

152. $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2-x}{1+x^2}+\cos\sqrt{x}\right]^{2x}$

153. $\lim_{x\to+\infty}\left(5x\sin\frac{1}{x}+\cos x\right)^x$

154. $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\frac{1}{4}|\sin x|\right)^{3x}$

155. $\lim_{x\to0^+}\left[x^2\operatorname{cotg} x+\sin x\right]^{1/\ln x}$

156. $\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x\operatorname{tg} x}-\frac{1}{x^2}\right]$

157. $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}+5^{1/x}}{3}\right]^x$

158. $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

159. $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^{2/3}}$

160. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3+\sin x)}{x}$

161. $\lim_{x\to+\infty} x^2(\operatorname{arctg} x-\arccos x^{-2})$

162. $\lim_{x\to+\infty} x(\operatorname{arctg} x-\arccos x^{-2})$

163. $\lim_{x\to+\infty}|\sin x|^{2x}$

164. $\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\sin x}-1}{x}$

165. $\lim_{x\to0}\frac{x^2\operatorname{arctg}[3(x-x^2)]}{\sinh x-x\cosh x}$

166. $\lim_{x\to0}\frac{\sin[\ln(3x+1)]}{e^x-3^x}$

167. $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}}{\sqrt{x}}$

168. $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[4]{1+\sin^2 x}-1}{\left\{(1+\sin x)^{-1/x}-e^{-1}\right\}\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-x^2}}\right)}$

169. $\lim_{x\to0}\frac{3\operatorname{arctg} x+\sin^2 x(1-\cos 2x)}{27x^4+5\sin x}$

170. $\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\operatorname{tg} x+5x}{2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$

171. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)^3}{\sin 5x + \sqrt[3]{x^4}\sin x}$

172. $\lim_{x\to 0^+} \left\{(\sin x)^{-1/x^2} - x^{-1/x^2}\right\}$

173. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(e^x \cos x) - \sin(\sinh x)}{(e^x - 4^x)^2}$

174. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(3^x - 2^x)\,\mathrm{tg}\, x}{\cos 2x - 1}$

175. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\mathrm{arctg}\, x^2}$

176. $\lim_{x\to 0^+} [1 + \arcsin(e^x - 1)]^{1/\sin x}$

177. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$

178. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$

179. $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{3x + \ln x}$

180. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\mathrm{tg}\, x)^{\sqrt{\cos x}}$

181. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e - (1 + \mathrm{arctg}\, x)^{1/x}}{x}$

182. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\ln \sin 2x}$

183. $\lim_{x\to +\infty} \{\ln x\}^{(-1)^{[x]}/x}$

184. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x} - 1 + \cos x)$

185. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 + 2x - \cos x}{\mathrm{tg}\, x + x^3}$

186. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{1 - 4^x}$

187. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x + \sqrt{x}}$

188. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\arccos x}$

189. $\lim_{x\to +\infty} \left\{\ln(2x^2 + x - 3) - \ln(x^2 + 1)\right\}$

190. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\mathrm{tg}\, \pi x}$

191. $\lim_{x\to 0} \left(1 + \mathrm{arctg}\, x\right)^{(1 - \sin x)/(x^2 + 2x)}$

192. $\lim_{x\to 0} \left(7 - \dfrac{3x \sin x}{1 - \cos x}\right)^{1/x^2}$

193. $\lim_{x\to 0^+} \left(\sin x + \cos x\right)^{1/x}$

194. $\lim_{x\to 0^+} \left(\sin x + \cos x\right)^{(2+x)/x^2}$

195. $\lim_{x\to 0^-} \left(\sin x + \cos x\right)^{1/x}$

196. $\lim_{x\to 0^+} \left(4\,\mathrm{tg}\, x + \cos x\right)^{1/x}$

197. $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + 2x^3 + x\right)^{\mathrm{cotg}\, x}$

198. $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^{3\sqrt{x^2+1} + \ln x}$

199. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - 2\cos x}{x^2}$

200. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\sqrt{1 - x^2} + x\right) - x}{x^2}$

201. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x - \mathrm{arctg}\, x}{x^2}\right)^{1/\ln x}$

202. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x \cosh x}{x^4}$

203. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \sin x \cos x - \cos x - \sin x}{\left(x - \pi/2\right)^2}$

204. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 3}}{4x + 2} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}x}$

205. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$.

Dire per quali numeri reali a esistono finiti e diversi da 0 i seguenti limiti:

206. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - x^a} - \cos x}$

207. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^a x}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\sin x + \cos x}}$

208. $\lim_{x\to \pi} \dfrac{2(x - \pi)^a}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}\, x} - \sqrt{1 - \mathrm{tg}\, x}}$

209. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\pi \dfrac{1 - \cos ax}{x^2}\right)}{x^2}$

210. $\lim_{x\to +\infty} \left[x - x^a \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

211. $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\cos x + \mathrm{arctg}\, \dfrac{x^2 + 6x}{x + 4}\right) \left(\ln(1 + e^{1/x})\right)^a$

212. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 - \sin^a x} - \cos x}$

213. $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2} - \cos x}{x^3 \sin x}$.

Dire per quale o quali valori reali di a risulta

214. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{a\sqrt{x^2 + 2x} + (1 - a)\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = 0$

215. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x} - 2x - a\right) = -\dfrac{1}{2}$.

7 La formula di Taylor

Abbiamo visto nelle *Lezioni* (cap. 6, § 5) che, se $f(x)$ è una funzione di classe C^n in un intorno di un punto x_0, si ha la *formula di Taylor*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0),$$

dove il *resto n-esimo* $R_n(x; x_0)$ è infinitesimo, per $x \to x_0$, di ordine superiore a n:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Se poi $f(x)$ è infinitamente derivabile, si può considerarne la serie o lo sviluppo di Taylor, che in molti casi converge alla funzione data (vedi *Lezioni*, cap. 6, § 7).

Ricordiamo dalle *Lezioni* gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari, nei quali il punto iniziale x_0 è l'origine (a fianco è indicato, per ciascuna funzione,

[redacted]

127. 1 se $m > k$ e se $m = k$; $+\infty$ se $m < k$ e $k - m$ è pari; non esiste se $m < k$ e $k - m$ è dispari.

128. $+\infty$ **129.** 1 **130.** $\ln A$

131. $\frac{1}{3}$ **132.** 1 **133.** Non esiste.

134. 1 **135.** $\frac{1}{3}$ **136.** $+\infty$

137. $e^{-1/6}$ **138.** $\frac{1}{2}$ **139.** 0

140. Non esiste. **141.** $+\infty$ **142.** -1

143. $-\frac{4}{3}$ **144.** Non esiste. **145.** $2\pi + 10$

146. $1/\sqrt{e}$ **147.** $6\sqrt{2}$ **148.** $\frac{1}{3}$

149. $\frac{1}{9}$ **150.** 1 **151.** $+\infty$

152. $+\infty$ **153.** $+\infty$ **154.** 0

155. e **156.** $-\frac{1}{3}$ **157.** $\sqrt[3]{30}$

158. $-\infty$ **159.** $-\frac{1}{2}$ **160.** 0

161. $-\infty$ **162.** -1 **163.** Non esiste.

164. $-\infty$ **165.** -9 **166.** $-\frac{3}{\ln 3 - 1}$

167. 1 **168.** $\frac{e}{2}$ **169.** $\frac{3}{5}$

170. 0 **171.** $\frac{3}{5}$ **172.** $+\infty$

173. $-\frac{1}{2(\ln 4 - 1)^2}$ **174.** $-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ **175.** -2

176. e **177.** 1 **178.** $\frac{1}{3}$

179. $e^{3/2}$ **180.** 1 **181.** $\frac{e}{2}$

182. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **183.** 1 **184.** $+\infty$

185. 2 **186.** $\frac{\ln 3}{\ln 4} - \frac{1}{2}$ **187.** $+\infty$

188. 1 **189.** $\ln 2$ **190.** $\frac{1}{\pi}$

191. $\sqrt{e}$ **192.** e **193.** e

194. $+\infty$ **195.** e **196.** e^4

197. e **198.** $e^{3/2}$ **199.** $\frac{3}{4}$

200. -1 **201.** e **202.** $\frac{1}{4}$

203. $\frac{1}{2}$ **204.** $-\frac{e^{3/4}}{2\sqrt{2}}$ **205.** $-\frac{e}{2}$

206. $a = 1$ $[\lim = -2]$ **207.** $a = 2$ [4] **208.** $a = 1$ [2]

209. $a^2 = 2k + 1$ $(k \in \mathbf{N})$ $\left[\frac{(-1)^k(2k+1)^2\pi}{24}\right]$ **210.** $a = 2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

211. $a = 1$ [3/2] **212.** $a > 2$ [2] **213.** $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$ [1/12]

214. $a = \frac{-1}{\sqrt{2} - 1}$ **215.** $a = 3/4$ **216.** $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$

217. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{3n}}{4^n}$ **218.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **219.** $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n \ln^n 2}{n!}$

220. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}$ **221.** $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ **222.** $x^3 - \frac{1}{2}x^5$

223. $x + \frac{x^3}{8} + \frac{7x^5}{128}$ **224.** $-\frac{1}{3}x^4$ **225.** $x^2 + x^3 + \frac{7x^4}{12} + \frac{x^5}{4}$

226. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24}$ **227.** $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$ **228.** $1 - x + x^3 - x^4$