Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

17 Aprile 2012

A.A. 2011-2012 - Docente: Prof. Luigi Chierchia

Tutori: Daniele Dimonte e Sara Lamboglia

TUTORATO 9 - CORREZIONE COMPITO

1. Esercizio 1 [Pt. 24]

   (i) Definire la norma operatoriale di una matrice; precisare e dimostrare la seguente relazione: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

   (ii) Enunciare il teorema della funzione inversa in $\mathbb{R}^n$ e illustrarlo sulla funzione

   $$x \in \mathbb{R}^2 \to (\ln(1+x_1)\cos(x_2+x_1),\ \sin(x_2-x_1))\,.$$

   (iii) Dare la definizione di insieme misurabile secondo Peano-Jordan e dimostrare che l'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = x\}$ è misurabile e $\mathrm{mis}_2(E) = 0$.

   (iv) Dare la definizione di integrale di Riemann di f su $B \subset \mathbb{R}^n$ e dare un esempio di una funzione integrabile su $B = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_i \geq 0$ e $x_1 + \ldots + x_n \leq 1\}$.

   (v) Dare la definizione di insieme normale; darne un esempio in $\mathbb{R}^4$.

   (vi) Calcolare l'integrale $\int_{[-1,1]^3} e^{|x|_1}dx$ giustificando i vari passaggi.

   Soluzione

   (i)

   $$\|A\| := \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{x\neq 0} \frac{|Ax|}{x}$$

   $$\|AB\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|ABx|}{|x|} = \sup_{x\neq 0} \frac{|ABx|}{|x|}\frac{|Bx|}{|Bx|} \leq$$

   $$\leq \left(\sup_{x\neq 0} \frac{|ABx|}{|Bx|}\right)\left(\sup_{x\neq} \frac{|Bx|}{|x|}\right) = \|A\|\|B\|$$

   (ii)

   $$f(x_1,x_2) = (\ln(1+x_1)\cos(x_2+x_1),\ \sin(x_2-x_1))$$

   Per poter applicare il Teorema della funzione inversa in un punto x_0 basta avere che la funzione nel punto sia C^k e che $\|\nabla f(x_0)\| \neq 0$. Scegliamo il punto $x_0 = (0,0)$, infatti

   $$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(x_1+x_2)}{1+x_1} - \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) & -\ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) \\ -\cos(x_2-x_1) & cos(x_2-x_1) \end{pmatrix}$$

   $$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare r e ρ come nel Teorema studiamo (N.B.: studiamo il $\sup_{X_0}$, ma attenzione, questo sarebbe il $\sup_{Y_0}$ del Teorema)

$$\sup_{X_0} \|\mathbb{I} - T\nabla f(x_1, x_2)\| =$$

$$= \sup_{X_0} \left\| \begin{pmatrix} 1 - \frac{\cos(x_1+x_2)}{1+x_1} + \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) \\ \cos(x_2 - x_1) - \frac{\cos(x_1+x_2)}{1+x_1} + \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. \begin{matrix} \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) \\ 1 - cos(x_2 - x_1) + \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) \end{matrix} \right) \Bigg\| \leq \theta$$

Per il solito ragionamento sulla disuguaglianza fra norma operatoriale e norma infinito basta porre ogni elemento in modulo $\leq \frac{\theta}{2}$

$$\bullet \sup_{X_0} \left| 1 - \frac{\cos(x_1+x_2)}{1+x_1} + \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{X_0} \left(\left| 1 - \frac{\cos(x_1+x_2)}{1+x_1} \right| + |\ln(1+x_1)| \right) \leq$$

$$\leq \sup_{X_0} \left(\frac{|x_1| + |1 - \cos(x_1+x_2)|}{|1+x_1|} + 2|x_1| \right) \leq$$

(se $\rho \leq \frac{1}{2}$ allora $|1+x_1| \geq 1 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$)

$$\leq \sup_{X=0} (2|x_1| + 2|1 - \cos(x_1+x_2)| + 2\rho) \leq$$

$$\leq \sup_{X=0} \left((x_1+x_2)^2 + 4\rho \right) \leq 4\rho^2 + 4\rho \leq 8\rho \leq \frac{\theta}{2};$$

$$\rho \leq \frac{\theta}{16}$$

$$\bullet \sup_{X_0} |\ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2)| \leq 2\rho \leq \frac{\theta}{2};\ \rho \leq \frac{\theta}{4}$$

$$\bullet \sup_{X_0} \left| c - \frac{\cos(x_1+x_2)}{1+x_1} + \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{X_0} \left(\left| \cos x_2 \cos x_1 + \sin x_2 \sin x_1 - \frac{\cos x_2 \cos x_1 - \sin x_2 \sin x_1}{1+x_1} \right| + 2|x_1| \right) \leq$$

$$\leq \sup_{X_0} \left(|\cos x_2 \cos x_1| \frac{|x_1|}{|1+x_1|} + |\sin x_2 \sin x_1| \frac{|2+x_1|}{|1+x_1|} \right) + 2\rho \leq$$

$$\leq \sup_{X_0} (2|x_1| + 2|x_2 x_1|(2 + |x_1|)) + 2\rho \leq$$

$$\leq 4\rho + 5\rho^2 \leq 9\rho \leq \frac{\theta}{2};\ \rho \leq \frac{\theta}{18}$$

$$\bullet \sup_{X_0} |1 - \cos(x_2 - x_1) + \ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2)| \leq$$

$$\leq \sup_{X_0} (|1 - \cos(x_2 - x_1)| + |\ln(1+x_1)\sin(x_1+x_2)|) \leq$$

$$\leq \sup_{X_0}\left(\frac{(x_2-x_1)^2}{2}+2|x_1|\right)\leq 4\rho\leq\frac{\theta}{2};\ \rho\leq\frac{\theta}{8}$$

Quindi complessivamente, ricordando che $\|T\|\leq 2\|T\|_\infty$, si ha che la relazione

$$r\leq\frac{\rho(1-\theta)}{\|T\|}$$

è assicurata da

$$r\leq\frac{\rho(1-\theta)}{\|T\|_\infty}=\rho(1-\theta)$$

(iii) Notiamo innanzitutto che $Fr(E)=E$. Siano dunque $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{q_i\}=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Allora si ha che

$$\forall\varepsilon>0,\ E\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}Q_i\ con\ Q_i=[q_i-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^i}},q_i+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2^i}}]^2$$

Allora, dato che $mis_2Q_i=\frac{\varepsilon}{2^i}$ si ha che

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}mis_2(Q_i)=\varepsilon$$

E dunque $mis_2(E)=0$.

(iv) Una banale funzione integrabile su B può essere

$$f(x)=\chi_E,\ E=\{x\in\mathbb{R}^n:\ 0\leq x_i\leq\max x_i\leq\frac{1}{n}\}\subset B$$

con $\int_B fdx=\int\chi_E\chi_B=\int\chi_E=mis(E)=\frac{1}{n^n}$.

(v) Un esempio di insieme normale è $A=\{x\in\mathbb{R}^4:\ |x|\leq 1\}$. Infatti detto $B=\{x\in\mathbb{R}^3:\ |x|\leq 1\}$ B è misurabile e $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}:\ -\sqrt{1-|x|^2}\leq y\leq\sqrt{1-|x|^2}\}$.

(vi) Sia $A=[-1,1]^3$; A è normale. Infatti $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ -1\leq z\leq 1\ \forall(x,y)\in B\}$ con $B=[-1,1]^2$. Analogamente dicasi per B, infatti $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -1\leq y\leq 1\ \forall x\in C\}$ con $C=[-1,1]$. Dunque

$$\int_A e^{|(x,y,z)|_1}dxdydz=\int_A e^{|x|+|y|+|z|}dxdydz=\int_A e^{|x|}e^{|y|}e^{|z|}dxdydz=$$

$$=\int_B(\int_{-1}^1 e^{|x|}e^{|y|}e^{|z|}dz)dxdy=\int_{-1}^1(e^{|x|}\int_{-1}^1 e^{|y|}(\int_{-1}^1 e^{|x|}dx)dy)dz=$$

$$=(\int_{-1}^1 e^{|x|}dx)(\int_{-1}^1 e^{|y|}dy)(\int_{-1}^1 e^{|x|}dx)=(\int_{-1}^1 e^{|x|}dx)^3=8(\int_0^1 e^xdx)^3=$$

$$=8(e-1)^3$$

2. Esercizio 2 [Pt.30] Sia $x\to\mathbb{R}^2\to g(x)\in\mathbb{R}$ la funzione definita implicitamente da

$$\begin{cases} g(0)=0\\ \sin(x_1+g(x))+\frac{x_1}{1-x_2^2g(x)}=0.\end{cases}$$

Trovare una sfera $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ su cui sia definita e regolare la funzione g e dare una stima del $\sup_B |g|$.

Soluzione

Per trovare r basterebbe applicare il Teorema della funzione implicita a

$$F(y, x_1, x_2) = \sin(x_1 + y) + \frac{x_1}{1 - x_2^2 y}$$

nel punto $(0, 0, 0)$. Infatti il Teorema ci darebbe una $g(x_1, x_2)$ tale che $g(0, 0) = 0$ (la prima condizione) e tale da realizzare anche la seconda in quanto $F(g(x_1, x_2), x_1, x_2) = 0$, ed inoltre la r del teorema sarebbe la r cercata, e siccome g andrebbe da $B_r(0, 0) = B$ a $B_\rho(0)$ si ha che il $\sup_B |g| \leq \rho$. Passiamo dunque a verificare che sia possibile applicare il teorema:

Per prima cosa vediamo che

$$F(0, 0, 0) = 0$$

Inoltre studiamo $\frac{\partial F}{\partial y}(y, x_1, x_2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y, x_1, x_2) = \cos(x_1 + y) + \frac{x_1 x_2^2}{(1 - x_2^2 y)^2}; \ \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 0) = 1 = T^{-1}, \ T = 1$$

Procediamo dunque alla ricerca di r e ρ:

$$\sup_{X_0} |F(0, x_1, x_2)| = \sup_{X_0} |\sin x_1 + x_1| \leq \sup_{X_0} |\sin x_1| + \sup_{X_0} |x_1| \leq 2 \sup_{X_0} |x_1| \leq$$

$$\leq 2r \leq \frac{\theta\rho}{|T|} = \theta\rho, \ r \leq \frac{\theta\rho}{2}$$

$$\sup_{X_0 \times Y_0} |1 - T\frac{\partial f}{\partial y}(y, x_1, x_2)| \leq \sup_{X_0 \times Y_0} \left| 1 - \cos(x_1 + y) - \frac{x_1 x_2^2}{(1 - x_2^2 y)^2} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{X_0 \times Y_0} |1 - \cos(x_1 + y)| + \sup_{X_0 \times Y_0} \left| \frac{x_1 x_2^2}{(1 - x_2^2 y)^2} \right| \leq$$

Se $r^2 \rho \leq \frac{1}{2}$ (che è verificato se $\rho \leq 1$ in quanto allora $r^2 \rho \leq r\rho \leq \frac{\theta\rho^2}{2} \leq \frac{1}{2}$) si ha che

$$\leq \sup_{X_0 \times Y_0} \left| \frac{(x_1 + y)^2}{2} \right| + 4r^3 \leq \frac{(r + \rho)^2}{2} + 4r \leq \frac{1}{2} r^2 + r\rho + \frac{1}{2}\rho^2 + 4r \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\theta\rho}{2}\right) + \left(\frac{\theta\rho}{2}\right)\rho + \frac{1}{2}\rho + 4\left(\frac{\theta\rho}{2}\right) \leq \frac{1}{4}\theta\rho + \frac{1}{2}\theta\rho + \frac{1}{2} + 2\theta\rho =$$

$$= \frac{1}{4}(7\theta + 2)\rho \leq 1 - \theta; \ \rho \leq \frac{4(1 - \theta)}{7\theta + 2}$$

3. Esercizio 3 [Pt.14] Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il dominio limitato dalle parabole $y^2 = 4x$ e $x^2 = 4y$ e calcolare l'integrale

$$\int_D xydxdy.$$

Soluzione

Mettendo a sistema le parabole si vede chiaramente che D può essere espresso come $D = \{(x, y) \in \diagdown^2 : \ 4y \leq x^2, \ 4x \leq y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 4], \ y \in [\frac{x^2}{4}, 2\sqrt{x}]\}$. Dunque

$$\int_D xydxdy = \int_0^4 (\int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} xydy)dx = \int_0^4 \frac{x}{2}\left[y^2\right]_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{32}\int_0^4 (64x^2 - x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

4. Esercizio 5 [Pt. 12] Calcolare il massimo di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1$ sull'ellissoide $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$.

Soluzione Sia φ la funzione di vincolo, allora

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2, \ \nabla\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix}$$

Inoltre calcoliamo il gradiente di f e, dato che il vincolo Ω è compatto, passiamo a trovare massimo e minimo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda\nabla\varphi(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ 2z = 4\lambda z \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x = 1 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ (1 - 2\lambda)z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases}$$

La prima e la seconda ci danno chiaramente $\lambda \neq 1$ e $y = 0$, mentre la terza ci da o $\lambda = \frac{1}{2}$ o $z = 0$.

Cominciamo considerando il primo caso:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ 2z^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

che non ci dà risultati; poniamo dunque $z = 0$:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

Da cui gli unici punti $P_1 = (\sqrt{2}, 0, 0)$ e $P_2 = -P_1 = (-\sqrt{2}, 0, 0)$, e dato che $f(P_1) = 1 - 2\sqrt{2}$ e $f(P_2) = 2\sqrt{2} + 1$ si ha che

$$\min_\Omega f = 1 - 2\sqrt{2}, \ \max_\Omega f = 2\sqrt{2} + 1$$

5. Esercizio 6 [Pt. 20] Discutere la misurabilità in$\mathbb{R}^2$ dell'insieme $E = \bigcup_{k\geq 1} B_{e^{-k}}\left(\frac{1}{k}, 0\right)$.

   Soluzione

   Sappiamo che un insieme è misurabile se la sua frontiera ha misura nulla. Notiamo che

   $$\partial E \subset \bigcup_{k\geq 1} D_{e^{-k}}\left(\frac{1}{k}, 0\right)$$

   Inoltre per ogni N_0 si ha che (poiche ogni disco D ha misura nulla)

   $$mis\left(\bigcup_{k=1}^{N_0} D_{e^{-k}}\left(\frac{1}{k}, 0\right)\right) = \sum_{k=1}^{N_0} mis\left(D_{e^{-k}}\left(\frac{1}{k}, 0\right)\right) = 0$$

   ed inoltre $\forall \varepsilon$ si ha che $\exists k_0$ tale che

   $$\bigcup_{k\geq k_0} D_{e^{-k}}\left(\frac{1}{k}, 0\right) \subset \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]^2$$

   Dunque $mis(\partial E) \leq mis\left(\bigcup_{k\geq 1} D_{e^{-k}}\left(\frac{1}{k}, 0\right)\right) = 0$ ed E è misurabile.