

II esonero – 1/6/2012

N.B. • *Indicare in cima all'elaborato: nome, cognome, data di nascita, n. matricola (o n. documento).*

- *Il punteggio totale è in centesimi; il punteggio di ogni singolo esercizio è indicato tra parentesi quadrate.*
- *È vietato: parlare, scambiarsi informazioni; consultare testi, appunti, etc.; l'uso del cellulare, calcolatrici, etc.*
- *Le risposte vanno sempre motivate chiaramente e sinteticamente! Risposte senza giustificazioni non danno punteggio.*
- **Attenzione:** *è obbligatorio svolgere il primo esercizio.*

Es 1 [Pt. 25] (i) Enunciare il teorema di cambio di variabili in \mathbb{R}^n .

(ii) Dare la definizione di immersione di un dominio di dimensione 3 in \mathbb{R}^4 . Definire una varietà di dimensione 3 immersa in \mathbb{R}^4 e darne un esempio.

(iii) Enunciare il teorema della divergenza e illustrarlo in un caso semplice.

(iv) Dare la definizione di 1-forma esatta e 1-forma chiusa in \mathbb{R}^n e discutere la relazione tra di esse (anche con esempi).

(v) Dare un esempio di un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che abbia flusso esterno nullo su $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|_2 = 1\}$.

Es 2 [Pt. 40] Enunciare il teorema di Stokes in \mathbb{R}^3 e verificarlo direttamente nel caso:

$$F(x, y, z) = (x + y, z - y, x^3y)$$

$$S = \{z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Es 3 [Pt. 35] Siano

$$F(x, y, z) = (-ye^{x+y}, xe^{x+y}, -xy)$$

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x + y; x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

(i) Si calcoli la divergenza di F .

(ii) Si descriva il bordo (la frontiera) di V e la normale esterna nei punti non singolari.

(iii) Si calcoli $\int_V \nabla \cdot F$