Esercizi da esame

Es 1 Dimostrare che $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è trascurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di insiemi elementari $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $Q \subseteq \cup E_k$ e $\sum \mathrm{mis_n}\, E_k < \varepsilon$.

Es 2 Dato $0 < \gamma < 1$ e una numerazione[1] $\{r_k\}$ di $\mathbb{Q} \cap (0,1)$, definiamo

$$I_j := \Big(r_j - \frac{\gamma}{2^{j+1}}, r_j + \frac{\gamma}{2^{j+1}}\Big) \cap (0,1)\,, \quad A_k := \bigcup_{j=1}^{k} I_j\,, \qquad A := \bigcup_{k\geq 1} \chi_{A_k}\,, \quad f := \chi_A\,. \quad (1)$$

(i) Dimostrare che $f_k := \chi_{A_k} \uparrow f$ su $(0,1)$ e che $\int_0^1 f := \sup \int_0^1 f_k \leq \gamma$ e quindi, in particolare, $f \in \mathscr{L}_\uparrow(0,1)$.

(ii) Dimostrare che se $f = \chi_A$ q.o., allora $f \notin \mathscr{R}(0,1)$.

(iii) Dimostrare

$$\frac{\gamma}{4} \leq \int_0^1 \chi_A \leq \gamma\,,$$

e che tali stime non possono, in generale, essere migliorate, facendo vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\{r_k\}$ e $\{r'_k\}$ numerazioni di $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ tali che se A e A' denotano gli insiemi associati come sopra a $\{r_k\}$ e $\{r'_k\}$ rispettivamente, allora

$$\int_0^1 \chi_A < \frac{\gamma}{4} + \varepsilon\,, \qquad \int_0^1 \chi_{A'} > \gamma - \varepsilon\,.$$

Es 3 (i) Dimostrare che se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e $f : A \to \mathbb{R}$, allora, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $\{x \in A \big|\ \mathrm{osc}(f,x) \geq \varepsilon\}$ è chiuso.

(ii) Se $x \in \mathring{D}$, $D \subseteq A$, allora $\mathrm{osc}(f,x) \leq \mathrm{osc}(f,D)$.

(iii) Se $\mathrm{osc}(f,x) \leq \varepsilon$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $\mathrm{osc}(f, B_\delta(x)) \leq 2\varepsilon$.

Es 4 Si dimostri che un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$ non è trascurabile.

Es 5 (i) Sia

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Si dimostri che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ si costruisca φ_ε crescente tale che: $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ se $x \leq 0$, $\varphi(x) = 1$ se $x \geq \varepsilon$.

(iii) Per ogni $-\infty < a < b < +\infty$ e $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, si costruisca $\psi = \psi^\varepsilon_{a,b} \in C_0^\infty([a,b])$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ per ogni x e $\psi(x) = 1$ se $a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon$.

(iv) Si dimostri che se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è un rettangolo (non degenere), allora $C_0^\infty(E)$ è denso in $S(E)$ e in $\mathscr{L}^1(E)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$.

Es 6 Dare un esempio di funzione non negativa $f \in \mathscr{R}([0,1])$, tale che $\#\mathrm{Disc}(f) = \#\mathbb{R}$ (ossia f ha un numero di discontinuità non numerabile) e $\int_a^b f > 0$ per ogni $0 \leq a < b \leq 1$.

Es 7 Definiamo il **sup essenziale** di $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come

$$\|f\|_\infty := \inf_{g\in\tilde{f}} \sup_{E} |g|\,,$$

[1] Ossia $\{r_k\}$ è una successione tale che $r_k \neq r_j$ se $j \neq k$ e $\{r_k \big|\ k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$; $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$.

dove $\tilde{f} := \{g : E \to \mathbb{R}^n \big| \, g = f \quad \text{q.o.}\}$ e sia

$$\mathscr{L}^\infty(E) := \{f : E \to \mathbb{R}^n \big| \; \exists f_k \in S(E) \text{ t.c. } f_k \to f \text{ q.o.}\,, \text{e } \|f\|_\infty < \infty\}\,.$$

Dimostrare che $(\mathscr{L}^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato e che $L^\infty(E) := \mathscr{L}^\infty(E)/\sim$ è uno spazio di Banach (dove $f \sim g$ significa $f = g$ q.o. in E).

Es 8 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Peano–Jordan. Dimostrare che $\mathring{A}$ e $\overline{A}$ sono misurabili secondo Pean–Jordan e che

$$\text{mis}\, A = \text{mis}\, \mathring{A} = \text{mis}\, \overline{A}$$

(qui 'mis' denota la misura di Peano–Jordan).

Definizione 1 Un prodotto scalare (o 'hermitiano') su uno spazio vettoriale complesso H (ossia con campo di scalari $\mathbb{C}$) è una forma sesquilineare $(\cdot,\cdot)$ definita positiva ossia una funzione da $H \times H \to \mathbb{C}$ tale che:

$$\begin{aligned}
&(u,u) \geq 0\,, \quad \forall\, u \in H\,; \quad (u,u) = 0 \implies u = 0\\
&(au + bv, w) = a(u,w) + b(v,w)\,, \ \forall\, a,b \in \mathbb{C}\,, u,v \in H\\
&\overline{(u,v)} = (v,u)\,, \quad \forall\, u,v \in H
\end{aligned}$$

Es 9 Sia H uni spazio vettoriale complesso dotato di prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$.
(i) Si dimostri che $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ è una norma su H (tale norma si dice 'indotta dal prodotto scalare').

Suggerimento: dimostrare prima che se $e \in H$ e $\|e\| = 1$, allora $0 \leq \|u - (u,e)e\|^2 = \|u\|^2 - |(u,e)|^2$.

(ii) Si dimostri la seguente 'identità di polarizzazione' (che permette di ricostruire il prodotto scalare dalla norma):

$$(u,v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2\,, \qquad \forall u,v \in H\,.$$

Definizione 2 Uno spazio di Hilbert (complesso) è uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto scalare e che sia uno spazio di Banach rispetto alla norma indotta al prodotto scalare. (Analoghe definizioni si danno per spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, nel qual caso si parla di spazio di Hilbert reale).

Es 10 Sia $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ lo spazio vettoriale delle successioni $x = \{x_j\}$ a valori complessi ($x_j \in \mathbb{C}$) tali che

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\,.$$

(i) Dimostrare che se $x, y \in \ell^2$ allora vale la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_2 \; \|y\|_2\,. \tag{2}$$

Dimostrare che $(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$ è un prodotto scalare su ℓ^2 e che ℓ^2 con tale prodotto scalare è uno spazio di Hilbert.

Es 11 Dimostrare che la mappa di Fourier[2]

$$\mathscr{F} : f \in L^2([0,2\pi]) \mapsto \{\hat{f}_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

è un isomorfismo di Spazi di Hilbert (ossia che è una mappa lineare, iniettiva, suriettiva che conserva il prodotto scalare).

Es 12 (*Esistenza ed unicità locale via contrazioni*)
(i) Si dimostri che una contrazione[3] $\phi : D \to D$ su uno spazio metrico non vuoto (D,d) completo ha un unico punto fisso $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ e che $\bar{x} = \lim \phi^n(x_0)$ per un qualunque $x_0 \in D$ (dove ϕ^n è la composizione di ϕ con se stessa n volte).

(ii) Si dimostri il teorema di esistenza locale ed unicità per sistemi di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^n$, $\dot{x} = f(x,t)$ con $f \in \mathrm{Loc}_*(A, \mathbb{R}^n)$, usando il Lemma delle contrazioni e dando una stima esplicita del tempo locale di esistenza delle soluzioni.

Es 13 (*Sistemi lineari a coefficienti costanti*)
Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si dimostri quanto segue.
(i) Se $(A-\lambda)v = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, allora $x(t) := e^{\lambda t}v$ è soluzione di $\dot{x} = Ax$. Si trovino n soluzioni *reali* indipendenti se A è diagonalizzabile.
(ii) Siano $v^{(i)}$, per $1 \le i \le m$, vettori non nulli in $\mathbb{R}^n$, sia $v^{(0)} = 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assumiamo che

$$(A-\lambda)v^{(i)} = v^{(i-1)}\,, \qquad \forall\ 1 \le i \le m\,.$$

Si dimostri che i vettori $v^{(i)}$ per $1 \le i \le m$ sono indipendenti.
Si dimostri che

$$x^{(i)}(t) := e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}v^{(m-k)}\,,$$

è soluzione del sistema $\dot{x} = Ax$.
(iii) Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sia x_0 un equilibrio del sistema $\dot{x} = Ax$ (ossia, $Ax_0 = 0$) e se ne discuta la stabilità[4] tracciando i possibili ritratti di fase (le possibili tracce di orbite con verso) in $\mathbb{R}^2$.

Es 14 Discutere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \beta x + kx = f(t)\,,$$

con $\beta \ge 0$, $k > 0$ e $f(t) \in C(\mathbb{R})$, C^1 a tratti e periodica di periodo $T > 0$.

Es 15 Discutere i seguenti esercizi del Demidovich (anche in modo qualitativo):

2744, 2748, 2750;
2769, 2777;
2786, 2791, 2793;
2806, 2809;
2823, 2829;
2928, 2995, 3004, 3021, 3036;
3082, 3083, 3086.

Es 16 Analisi qualitativa del flusso Hamiltoniano ϕ_H^t con $H = H(p,q) \in C^1(U,\mathbb{R})$, U aperto di $\mathbb{R}^2$, dove $\phi_H^t(p_0,q_0)$ è la soluzione massimale delle equazioni Hamiltoniane

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_q(p,q)\,, \\ \dot{q} = H_p(p,q)\,, \end{cases} \qquad p(0) = p_0\,, \quad q(0) = q_0\,.$$

---

[2] $\ell^2(\mathbb{Z})$ è lo spazio delle successioni complesse $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|x_n|^2 := \sup_j \sum_{|n|\le j}|x_j|^2 < \infty\,.$$

[3] Ossia, una mappa Lipschitziana con costante di Lipschitz $\theta < 1$.

[4] Vedi, ad esempio, https://it.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A0_interna.