# Definizioni varie

10/3/23

**(i)** Un *intervallo* di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ ossia un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ tale che se $x, y \in I$ allora $(1-t)x + ty \in I$ per ogni $0 \le t \le 1$; $\inf I$ e $\sup I$ sono, rispettivamente, l'*estremo sinistro e destro di* $I$. Se un intervallo $I$ è limitato e $a \le b$ sono i suoi estremi, chiamiamo *lunghezza o misura di* $I$ il numero non negativo $(b-a)$ che indichiamo con uno dei simboli $\ell(I) = |I| = \mathrm{mis}_1(I)$; se $I$ è non limitato, poniamo $\mathrm{mis}(I) = +\infty$.

Un *pluri–rettangolo* (o 'rettangolo') $R \subseteq \mathbb{R}^n$ è il prodotto cartesiano di $n$ intervalli (detti 'spigoli o lati del pluri–rettangolo'):

$$R = I_1 \times \cdots \times I_n := \bigotimes_{i=1}^{n} I_i \, ;$$

un *cubo* è un rettangolo i cui lati hanno lunghezza uguale. Un rettangolo si dice *degenere* se uno dei suoi lati ha lunghezza nulla.

**(ii)** Un *insieme elementare* $E$ è un insieme dato dall'unione di una famiglia finita di rettangoli $\{R_i\}$ limitati e a due a due disgiunti, ossia $1 \le i \le N \in \mathbb{N}$, $R_i \cap R_j = \varnothing$ se $i \ne j$ e[1] $E = \dot\cup R_i$; l'insieme $\mathscr{P} = \{R_i\}$ di tali rettangoli è una *partizione* dell'insieme elementare $E$.
Denotiamo con $\mathscr{E}_n$ *la famiglia degli insiemi elementari di* $\mathbb{R}^n$.

**(iii)** Se $R = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ è un rettangolo limitato, definiamo la *misura di* $R$ come il prodotto delle lunghezze degli intervalli unidimensionali $I_i$, ossia, se gli estremi di $I_i$ sono $a_i \le b_i$, definiamo la misura di $R$ come[2]

$$\mathrm{mis_n}\, R := |R| := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \, ; \tag{1}$$

se $R$ è non–degenere ed uno dei suoi lati è illimitato, poniamo $\mathrm{mis_n}\, R = +\infty$; se un rettangolo $R$ è degenere, poniamo $\mathrm{mis_n}\, R = 0$.

**(iv)** Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *a scalini* (o, 'a gradini') se

$$f = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{R_j} \tag{2}$$

con $c_j \in \mathbb{R}$ e $\{R_j\}$ famiglia di rettangoli limitati a due a due disgiunti.
L'*integrale* di una funzione a scalini $f$ in (2) è dato dal numero

$$\int_E f := \sum_{j=1}^{N} c_j \,\mathrm{mis}\, R_j \, , \tag{3}$$

dove $E$ indica un qualunque rettangolo di $\mathbb{R}^n$ la cui chiusura contenga il supporto[3] di $f$. In particolare, se $A = \dot\cup R_i \subseteq E$ è un insieme elementare, poniamo

$$\mathrm{mis_n}\, A := \int_E \chi_A = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{mis_n}\, R_i \, . \tag{4}$$

Dato un rettangolo $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $S(E)$ denota *la famiglia di funzioni a gradini* $f$ *con* $\mathrm{supp}(f) \subseteq \overline{E}$.

[1] il puntino sull'unione indica che l'unione è formata da insiemi disgiunti.
[2] Normalmente, quando non vi sia ambiguità, ometteremo l'indice della dimensione $n$ dal simbolo $\mathrm{mis_n}$, e denoteremo semplicemente $\mathrm{mis}\, R$ la misura $n$–dimensionale del rettangolo $n$–dimensionale $R$.
[3] Il supporto di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{supp}(f)$ è la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \ne 0\}$.

**(v)** Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $D$ tale che $D \cap A \neq \varnothing$, si definisce l'*oscillazione di $f$ sull'insieme $D$* la quantità

$$\operatorname{osc}(f, D) := \sup_{D\cap A} f - \inf_{D\cap A} f\,. \tag{5}$$

Se $x \in \overline{A}$ si definisce l'*oscillazione di $f$ in $x$* la quantità[4]

$$\operatorname{osc}(f, x) := \inf_{\delta>0} \operatorname{osc}(f, B_\delta(x))\,. \tag{6}$$

**(vi)** Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ rettangolo limitato, una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile secondo Riemann* (o, 'Riemann integrabile') se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni $g, h \in S(E)$ tali che

$$g \le f \le h \quad \text{su } E\,, \quad \text{e} \quad \int_E h - g \le \varepsilon\,, \tag{7}$$

in tal caso l'integrale (secondo Riemann) di $f$ è dato da

$$\int_E f := \sup_{\substack{g\in S(E)\\ g\le f}} \int_E g = \inf_{\substack{h\in S(E)\\ f\le h}} \int_E h\,. \tag{8}$$

L'insieme delle funzioni Riemann–integrabili su $E$ si denota con $\mathscr{R}(E)$.

**(vii)** Un insieme $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *trascurabile* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di cubi aperti $\{K_j\}$ tale che

$$Q \subseteq \bigcup_{k\ge1} K_j\,, \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mis_n} K_j < \varepsilon\,. \tag{9}$$

Una proprietà $\mathscr{P}$ si dice vera *quasi–ovunque* (q.o.) su $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se esiste un insieme trascurabile $Q \subseteq D$ tale che $\mathscr{P}$ è vera per ogni $x \in D \backslash Q$.

**(viii)** Sia $E$ rettangolo di $\mathbb{R}^n$.

$\mathscr{L}_\uparrow(E)$ denota l'insieme delle funzioni $f$ tali che esiste una successione crescente di funzioni $\{f_k\}$ tale che $f_k \in S(E)$, $f_k \uparrow f$ su[5] $E$ quasi ovunque e[6] $\displaystyle\int_E f := \sup \int_E f_k < \infty$.

$\mathscr{L}_\downarrow(E)$ denota l'insieme delle funzioni $f$ tali che esiste una successione decrescente di funzioni $\{f_k\}$ tale che $f_k \in S(E)$, $f_k \downarrow f$ su $E$ quasi ovunque e $\displaystyle\int_E f := \inf \int_E f_k > -\infty$.

$\mathscr{L}^1(E)$ denota l'insieme delle funzioni $f$ tali che $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in \mathscr{L}_\uparrow$ e $f_2 \in \mathscr{L}_\downarrow$.

**Note**

(1) $\mathscr{E}_n$ è un'algebra: se $E, F \in \mathscr{E}_n$, allora $E \cap F, E\backslash F, E \cup F \in \mathscr{E}_n$.

(2) La definizione in (3) non dipende dalla particolare rappresentazione di $f$.

(3) $\sup_A f - \inf_A f = \sup_{x,y\in A} |f(x) - f(y)|$ per ogni $f : A \to \mathbb{R}$.

(4) Se $x \in A$, $\operatorname{osc}(f, x) = 0$ se e solo $f$ è continua in $x$; (ma è sempre vero che $\operatorname{osc}(f, \{x\}) = 0$, $\forall\, x \in A$).

(5) $f \in \mathscr{R}(E)$ se e solo se esistono $g_k, h_k$ in $S(E)$ (definite sugli stessi rettangoli) tali che $g_k \le f \le h_k$ e $\displaystyle\int_E (h_k - g_k) \to 0$.

(6) L'integrale di Lebesgue non dipende dalle particolari successioni che lo definiscono.

---

[4] $B_\delta(x)$ denota la sfera aperta di centro $x$ e raggio $\delta$.

[5] Se $f_k, f : D \to \mathbb{R}$, $f_k \uparrow f$ su $D$ significa che, per ogni $x \in D$, $f_k(x) \le f_{k+1}$ per ogni $k$ e che $f(x) = \lim f_k(x)$.

[6] Qui $\int$ prende il nome di *integrale di Lebesgue*.