Esercizi 1–3

10/3/23

Es 1 Dimostrare che $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ è trascurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di insiemi elementari $\{E_k\}$ tale che $Q \subseteq \cup E_k$ e $\sum \mathrm{mis_n}\, E_k < \varepsilon$.

Es 2 Dato $0 < \gamma < 1$ e una numerazione[1] $\{r_k\}$ di $\mathbb{Q} \cap (0,1)$, definiamo

$$I_j := \Big(r_j - \frac{\gamma}{2^{j+1}}, r_j + \frac{\gamma}{2^{j+1}}\Big) \cap (0,1)\,, \quad A_k := \bigcup_{j=1}^{k} I_j\,, \qquad A := \bigcup_{k \geq 1} \chi_{A_k}\,, \quad f := \chi_A\,. \tag{1}$$

(i) Dimostrare che $f_k := \chi_{A_k} \uparrow f$ su $(0,1)$ e che $\int_0^1 f := \sup \int_0^1 f_k \leq \gamma$ e quindi, in particolare, $f \in \mathscr{L}_\uparrow(0,1)$.
(ii) Dimostrare che se $f = \chi_A$ q.o., allora $f \notin \mathscr{R}(0,1)$.
(iii) È sempre vero che

$$\frac{\gamma}{4} \leq \int_0^1 \chi_A \leq \gamma\,.$$

Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\{r_k\}$ e $\{r'_k\}$ numerazioni di $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ tali che se A e A' denotano gli insiemi associati come sopra a $\{r_k\}$ e $\{r'_k\}$ rispettivamente, allora

$$\int_0^1 \chi_A < \frac{\gamma}{4} + \varepsilon\,, \qquad \int_0^1 \chi_{A'} > \gamma - \varepsilon\,.$$

Es 3 (i) Dimostrare che se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e $f : A \to \mathbb{R}$, allora, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $\{x \in A \big| \operatorname{osc}(f,x) \geq \varepsilon\}$ è chiuso.
(ii) Se $x \in \mathring{D}$, $D \subseteq A$, allora $\operatorname{osc}(f,x) \leq \operatorname{osc}(f,D)$.
(iii) Se $\operatorname{osc}(f,x) \leq \varepsilon$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $\operatorname{osc}(f, B_\delta(x)) \leq 2\varepsilon$.

[1] Ossia $\{r_k\}$ è una successione tale che $r_k \neq r_j$ se $j \neq k$ e $\{r_k \big| k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$; $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$.