Esercizi 9–11

2/5/23

Definizione 1 Un prodotto scalare (o 'hermitiano') su uno spazio vettoriale complesso H (ossia con campo di scalari $\mathbb{C}$) è una forma sesquilineare $(\cdot,\cdot)$ definita positiva ossia una funzione da $H \times H \to \mathbb{C}$ tale che:

$$\begin{aligned}
&(u,u) \geq 0\,, \quad \forall\ u \in H\,; \quad (u,u) = 0 \implies u = 0\\
&(au + bv, w) = a(u,w) + b(v,w)\,,\ \forall\ a,b \in \mathbb{C}\,, u,v \in H\\
&\overline{(u,v)} = (v,u)\,, \quad \forall\ u,v \in H
\end{aligned}$$

Es 9 Sia H uni spazio vettoriale complesso dotato di prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$.
(i) Si dimostri che $\|u\| := \sqrt{(u,u)}$ è una norma su H (tale norma si dice 'indotta dal prodotto scalare').

Suggerimento: dimostrare prima che se $e \in H$ e $\|e\| = 1$, allora $0 \leq \|u - (u,e)e\|^2 = \|u\|^2 - |(u,e)|^2$.

(ii) Si dimostri la seguente 'identità di polarizzazione' (che permette di ricostruire il prodotto scalare dalla norma):

$$(u,v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2\,, \qquad \forall u,v \in H\,.$$

Definizione 2 Uno spazio di Hilbert (complesso) è uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto scalare e che sia uno spazio di Banach rispetto alla norma indotta al prodotto scalare. (Analoghe definizioni si danno per spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, nel qual caso si parla di spazio di Hilbert reale).

Es 10 Sia $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ lo spazio vettoriale delle successioni $x = \{x_j\}$ a valori complessi ($x_j \in \mathbb{C}$) tali che

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\,.$$

(i) Dimostrare che se $x,y \in \ell^2$ allora vale la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_2\ \|y\|_2\,. \tag{1}$$

Dimostrare che $(x,y) := \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$ è un prodotto scalare su ℓ^2 e che ℓ^2 con tale prodotto scalare è uno spazio di Hilbert.

Es 11 Dimostrare che la mappa di Fourier[1]

$$\mathscr{F} : f \in L^2([0,2\pi]) \mapsto \{\hat{f}_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

è un isomorfismo di Spazi di Hilbert (ossia che è una mappa lineare, iniettiva, suriettiva che conserva il prodotto scalare).

[1] $\ell^2(\mathbb{Z})$ è lo spazio delle successioni complesse $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 := \sup_j \sum_{|n|\leq j} |x_j|^2 < \infty\,.$$