Esercizi 12 e 13

23/5/23

Es 12 (*Esistenza ed unicità locale via contrazioni*)
(i) Si dimostri che una contrazione[1] $\phi : D \to D$ su uno spazio metrico non vuoto (D, d) completo ha un unico punto fisso $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ e che $\bar{x} = \lim \phi^n(x_0)$ per un qualunque $x_0 \in D$ (dove ϕ^n è la composizione di ϕ con se stessa n volte).

(ii) Si dimostri il teorema di esistenza locale ed unicità per sistemi di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^n$, $\dot{x} = f(x,t)$ con $f \in \mathrm{Loc}_*(A, \mathbb{R}^n)$, usando il Lemma delle contrazioni e dando una stima esplicita del tempo locale di esistenza delle soluzioni.

Es 13 (*Sistemi lineari a coefficienti costanti*)
Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si dimostri quanto segue.
(i) Se $(A - \lambda)v = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, allora $x(t) := e^{\lambda t} v$ è soluzione di $\dot{x} = Ax$. Si trovino n soluzioni *reali* indipendenti se A è diagonalizzabile.
(ii) Siano $v^{(i)}$, per $1 \le i \le m$, vettori non nulli in $\mathbb{R}^n$, sia $v^{(0)} = 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Assumiamo che

$$(A - \lambda)v^{(i)} = v^{(i-1)}\,, \qquad \forall\ 1 \le i \le m\,.$$

Si dimostri che i vettori $v^{(i)}$ per $1 \le i \le m$ sono indipendenti.
Si dimostri che

$$x^{(i)}(t) := e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} v^{(m-k)}\,,$$

è soluzione del sistema $\dot{x} = Ax$.
(iii) Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sia x_0 un equilibrio del sistema $\dot{x} = Ax$ (ossia, $Ax_0 = 0$) e se ne discuta la stabilità[2] tracciando i possibili ritratti di fase (le possibili tracce di orbite con verso) in $\mathbb{R}^2$.

Es 14 Discutere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \beta x + kx = f(t)\,,$$

con $\beta \ge 0$, $k > 0$ e $f(t) \in C(\mathbb{R})$, C^1 a tratti e periodica di periodo $T > 0$.

Es 15 Discutere i seguenti esercizi del Demidovich (anche in modo qualitativo):

2744, 2748, 2750;
2769, 2777;
2786, 2791, 2793;
2806, 2809;
2823, 2829;
2928, 2995, 3004, 3021, 3036;
3082, 3083, 23086.

---

[1] Ossia, una mappa Lipschitziana con costante di Lipschitz $\theta < 1$.
[2] Vedi, ad esempio, https://it.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A0_interna.