

Appendice B

Equazioni differenziali ordinarie

B.1 Introduzione

B.1.1 Equazioni scalari

Un'equazione differenziale ordinaria di ordine n per una funzione incognita $t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$, I intervallo, è un'equazione della forma¹

$$F(u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t), t) = 0, \quad (\text{B.1})$$

dove $F : E \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione definita su un aperto $E \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$; $u^{(j)}(t)$ denota la derivata di ordine j rispetto alla variabile 'indipendente' t .

Una soluzione (classica, locale) di (B.1) con F continua² è una funzione $u \in C^n(I, \mathbb{R})$ che verifica (B.1) per ogni³ $t \in I$.

L'equazione (B.1) si dice in forma normale se esiste una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che (B.1) abbia la forma $u^{(n)}(t) = f(u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t), t)$ o, più sinteticamente (non indicando la variabile indipendente nell'argomento di u e delle sue derivate):

$$u^{(n)} = f(u, u', \dots, u^{(n-1)}, t). \quad (\text{B.2})$$

Esempi:

- (i) $u' + ku = 0$, $k > 0$ costante. Circuito RC⁴
- (ii) $u' = ru \cdot \left(1 - \frac{u}{k}\right)$, $r, k > 0$ costanti. Equazione logistica di Verhulst⁵
- (iii) $u' = a(t)u + b(t)u^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ costante. Equazione di Bernoulli⁶
- (iv) $u = tu' + h(u')$, h funzione differenziabile. Equazione di Clairaut⁷
- (v) $u'' + \lambda u' + \omega^2 u = 0$, $\omega > 0$, $\lambda \geq 0$. Oscillatore armonico (smorzato)⁸

¹Come al solito, $u^{(1)}(t) = u'(t)$. L'aggettivo 'ordinarie' si riferisce al fatto che la funzione incognita dipende da una sola variabile; nel caso la funzione incognita dipenda da più variabili e compaiano nell'equazione le derivate parziali di u , l'equazione si chiamerà equazione differenziale alle derivate parziali; cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation.

²In generale, si possono considerare anche funzioni meno regolari chiarendo in maniera opportuna la definizione di 'soluzione'. In questo capitolo considereremo, di norma, funzioni lipschitziane.

³Implicitamente questo significa che $t \rightarrow (u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t), t) \in A$ per ogni $t \in I$.

⁴https://it.wikipedia.org/wiki/Circuito_RC

⁵https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_logistica

⁶https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_differenziale_di_Bernoulli

⁷https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Clairaut

⁸https://it.wikipedia.org/wiki/Moto_armonico

- (vi) $ku^{(4)} = q(t)$, $k > 0$, q funzione continua. *Equazione statica di Eulero–Bernoulli*⁹
 (vii) $t^n u^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_0 u = 0$, a_i costanti. *Equazione di Eulero*¹⁰
 (viii)* $u'' + \lambda u' + \text{sen } u = \varepsilon \cos t$, $\lambda, \varepsilon \geq 0$ costanti. *Pendolo smorzato/forzato*¹¹

Il numero naturale n prende il nome di *ordine dell'equazione differenziale*: le equazioni da (i) a (iv) sono del prim'ordine; le equazioni (v) e (viii) del second'ordine; l'equazione (vi) del quart'ordine; l'equazione (vii) di ordine n .

Tutte le equazioni sono in forma normale tranne (in generale) la (iv) e la (vii) (in un intorno di $t = 0$).

Le equazioni (i), (v), (vi) e (vii) sono *equazioni differenziali lineari*, ossia, la funzione incognita u e le sue derivate appaiono linearmente: la forma più generale di un'equazione differenziale scalare, lineare di ordine n è

$$a_n(t)u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = q(t). \quad (\text{B.3})$$

Tale equazione si dice *omogenea* se $q \equiv 0$, e in tal caso, se u_1 e u_2 sono soluzioni, allora lo sono anche $au_1 + bu_2$ per ogni scelta delle costanti a, b (in particolare, $u \equiv 0$ è soluzione di (B.3) con $q = 0$).

Le equazioni (i), (v) e (vii) sono lineari omogenee.

Soluzione di (i) e (vi):

(i): L'equazione differenziale (i) è lineare, omogenea e di grado uno. Moltiplicando per e^{kt} i due membri dell'equazione si ottiene $e^{kt}u' + e^{kt}u = 0$, ossia

$$(e^{kt}u)' = 0.$$

Fissando \bar{t} ed integrando tra \bar{t} e t tale relazione otteniamo

$$u(t) = e^{-k(t-\bar{t})}\bar{u}, \quad \bar{u} := u(\bar{t}). \quad (\text{B.4})$$

Dunque, per ogni costante \bar{u} , la funzione $u(t) = e^{-k(t-\bar{t})}\bar{u}$ è soluzione di (i) e la costante \bar{u} coincide col valore di u in \bar{t} . Si noti che, per come abbiamo ottenuto la formula (B.4), tutte le soluzioni C^1 di (i) hanno la forma (B.4): se $u \in C^1(I)$, I intervallo, soddisfa (i), allora vale (B.4) per un qualunque $\bar{t} \in I$.

(vi): Questa equazione (del quart'ordine, lineare, a coefficienti costanti) può essere risolta per *integrazione diretta*. Assumiamo $q \in C(I, \mathbb{R})$ con I intervallo. Dividendo per k e ponendo $f(t) := q(t)/k$, si ha $u^{(4)} = f$. Fissando $\bar{t} \in I$ e integrando tale relazione, si ottiene

$$u'''(t) = c_3 + \int_{\bar{t}}^t f(s)ds, \quad c_3 := u'''(\bar{t}).$$

Integrando ancora tre volte ed usando la formula (2.83) per la primitiva di ordine 4 di $f = q/k$, otteniamo:

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2} + c_3 \frac{t^3}{6} + \frac{1}{k} \int_{\bar{t}}^t \frac{(t-s)^3}{6} q(s) ds, \quad c_k = u^{(k)}(\bar{t}). \quad \blacksquare \quad (\text{B.5})$$

Come vedremo più avanti, anche le altre equazioni sopra elencate – tranne la (viii) – possono essere risolte 'esplicitamente' (in termini di integrali di funzioni date).

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Bernoulli_beam_theory

¹⁰https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Eulero

¹¹John H. Hubbard (1999): *The Forced Damped Pendulum: Chaos, Complication and Control*, The American Mathematical Monthly, 106:8, 741-758, DOI: 10.1080/00029890.1999.12005113. L'asterisco segnala una differenza sostanziale tra questo esempio e i precedenti che verrà chiarito in seguito.

L'equazione (viii) fisicamente rappresenta l'equazione che regola la dinamica di un pendolo che oscilla sotto effetto della forza peso in un piano verticale fissato, soggetto ad una forza di attrito proporzionale alla velocità angolare e ad una forza esterna periodica (per esempio, un campo magnetico generato da un solenoide) di intensità ε . Nel caso $\varepsilon = 0$, le traiettorie possono essere descritte 'esattamente' e tutti i moti classificati (sia nel caso $\lambda = 0$ che $\lambda > 0$), ma nel caso $\lambda, \varepsilon > 0$, questo *non è più possibile* ed, in generale, appaiono orbite 'caotiche' la cui evoluzione è impossibile prevedere per tempi lunghi¹².

B.1.2 Equazioni vettoriali (sistemi di equazioni)

Più in generale si possono considerare *sistemi di equazioni differenziali* della forma

$$F(u', u, t) = 0, \quad (\text{B.6})$$

dove $u : t \in J \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^n$ è una funzione incognita *vettoriale* e $F : E \subseteq \mathbb{R}^{n^2+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (J intervallo e E aperto), o in *forma normale*

$$u' = f(u, t), \quad (\text{B.7})$$

con u come sopra e $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (A aperto).

Esempi:

- (ix) Equazioni scalari di ordine superiore al primo possono essere scritte in forma di sistema del prim'ordine: per esempio, l'equazione (v), può essere scritta nella forma (B.7) ponendo

$$v = (v_1, v_2) := (u, u')$$

e

$$v' = f(v) := Av, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Analogamente, l'equazione scalare, lineare di ordine n (B.3) può essere scritta come sistema di ordine n come segue¹³:

$$v := (u, u', \dots, u^{(n-1)}), \quad \text{e} \quad v' = f(v, t) := A(t)v + g(t)$$

dove

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) & -a_n(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Più in generale, il sistema di equazioni differenziali

$$u' = A(t)u, \quad (\text{B.9})$$

dove $t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice che dipende in modo continuo da t , è un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine di dimensione n per la funzione incognita $t \in \mathbb{R} \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^n$. Nel caso $A(t) \equiv A$ non dipenda da t parleremo di un sistema di equazioni differenziali di dimensione n a coefficienti costanti.

¹²Si veda il già citato articolo di J.H. Hubbard nella nota 11.

¹³Nell'equazione differenziale il vettore v' va interpretato come *vettore colonna*.

- (x) Naturalmente, anche le equazioni scalari non lineari di ordine n possono risciversi sotto forma di sistema n -dimensionale del prim'ordine:

$$u^{(n)} = g(u, u', \dots, u^{(n-1)}, t), \quad \iff \quad v' = f(v, t) \quad (\text{B.10})$$

dove si è posto

$$v := (u, u', \dots, u^{(n-1)}), \quad f_i(v, t) := \begin{cases} v_{i+1}, & \text{se } 1 \leq i \leq n-1 \\ g(v, t), & \text{se } i = n. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

- (xi) Secondo Newton, il moto $t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$ di un punto materiale di massa costante $m > 0$ è descritto dall'equazione $f = m\ddot{x}$, dove t , la variabile indipendente, è il tempo; il punto (anziché l'apice) denota la derivata rispetto a¹⁴ t e $f = (f_1, f_2, f_3)$ la forza esercitata sul punto. Se la forza dipende dalla posizione, dalla velocità del punto e dal tempo, l'equazione di Newton è descritta da un sistema di 3 equazioni differenziali del second'ordine:

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t), \quad \iff \quad m\ddot{x}_i = f_i(x, \dot{x}, t), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{B.12})$$

- (xii) Un'altra classe di esempi importante sono i *sistemi hamiltoniani*, che descrivono l'evoluzione di 'sistemi dinamici conservativi'. Data una funzione $H \in C^1$ di $2n+1$ variabili $(p, q, t) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$, il seguente sistema del prim'ordine di $2n$ equazioni descrive l'evoluzione di un sistema hamiltoniano con ' n gradi di libertà', con hamiltoniana H , dove, come d'uso comune, la variabile indipendente t denota il 'tempo':

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_q(p, q, t) \\ \dot{q} = H_p(p, q, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{p}_i = -H_{q_i}(p, q, t), & 1 \leq i \leq n, \\ \dot{q}_i = H_{p_i}(p, q, t), & 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Per esempio, il 'pendolo matematico', la cui evoluzione è descritta dall'equazione (viii) nel caso $\lambda = \varepsilon = 0$ è un sistema hamiltoniano ad un grado di libertà e con hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \cos q, \quad (\text{B.14})$$

avendo posto, $q = q(t) := u(t)$ e, quindi, $u' := \dot{q} = H_p = p$.

- (xiii) Un ultimo esempio della forma $\dot{u} = f(u)$ con $u(t) := (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ e f funzione (vettoriale) polinomiale di grado 2, e, quindi, dalla forma matematica assai semplice, ma con una dinamica estremamente ricca e non ancora completamente studiata, è il 'sistema di Lorenz'¹⁵:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

dove σ, ρ, β sono costanti fisiche positive; tale sistema è uno dei prototipi alla base della 'teoria del chaos'¹⁶.

B.1.3 Tre esempi risolvibili

Alla fine del paragrafo § B.1.1, abbiamo visto come gli esempi (i) e (v) fossero 'esplicitamente' risolvibili. Vediamo qui altri tre casi semplici ma importanti di equazioni (o sistemi di equazioni) differenziali risolvibili¹⁷.

¹⁴Quindi \dot{x} denota la velocità istantanea del punto x e \ddot{x} (la derivata seconda rispetto a t) la sua accelerazione. Questa notazione è stata introdotta da Newton stesso; cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Notation_for_differentiation

¹⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system

¹⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory

¹⁷Anche gli esempi (ii), (iii), (iv), (v) e (vii) sono risolvibili: cfr. Complemento B.1.

Equazioni scalari lineari del prim'ordine

Consideriamo un'equazione scalare del prim'ordine lineare non omogenea e in forma normale per una funzione $t \mapsto u(t)$, ossia¹⁸

$$u' = a(t)u + b(t), \quad (\text{B.16})$$

dove I è un dato intervallo di \mathbb{R} e $a, b \in C(I)$. Se fissiamo $\bar{t} \in I$, poniamo

$$\alpha(t) := \int_{\bar{t}}^t a(s) ds \quad (\text{B.17})$$

e moltiplichiamo per $e^{-\alpha(t)}$ i termini dell'equazione in (B.16), otteniamo

$$u'e^{-\alpha} - ae^{-\alpha}u = e^{-\alpha}b,$$

ossia¹⁹

$$(ue^{-\alpha})' = e^{-\alpha}b. \quad (\text{B.18})$$

A questo punto, integrando la relazione (B.18) tra \bar{t} e t , osservando che $\alpha(\bar{t}) = 0$, segue dal Teorema fondamentale del calcolo che

$$u(t) = e^{\alpha(t)}\bar{u} + e^{\alpha(t)} \int_{\bar{t}}^t e^{-\alpha(s)}b(s) ds, \quad \text{dove } \bar{u} := u(\bar{t}). \quad (\text{B.19})$$

Queste, sono tutte (e sole²⁰) le soluzioni differenziabili di (B.16).

Si noti che le soluzioni di (B.16) sono definite su tutto l'intervallo I in cui le funzioni a e b sono continue.

Equazioni scalari a variabili separabili

Siano I e J intervalli e $f \in C(J, \mathbb{R})$, $g \in C(I, \mathbb{R})$. Vogliamo determinare le soluzioni C^1 di²¹

$$u' = f(u)g(t). \quad (\text{B.20})$$

Fissiamo $\bar{t} \in I$ e sia $\bar{u} := u(\bar{t})$ il valore della soluzione u (ammesso che esista) in \bar{t} . Se $f(\bar{u}) = 0$, chiaramente, $u(t) \equiv \bar{u}$ è soluzione di (B.20). Supponiamo ora che $f(\bar{u}) \neq 0$. Per il teorema di permanenza del segno, esiste un intervallo aperto $J_0 \subseteq J$ contenente \bar{u} tale che $f(x) \cdot f(\bar{u}) > 0$ per ogni $x \in J_0$. Inoltre se u è una soluzione C^1 di (B.20), per t vicino a \bar{t} , $u(t) \in J_0$ e possiamo, dunque, dividere per $f(u)$ ottenendo

$$\frac{u'}{f(u)} = g(t). \quad (\text{B.21})$$

Integrando tra \bar{t} e t , otteniamo

$$\int_{\bar{t}}^t \frac{u'}{f(u)} dt = G(t), \quad G(t) := \int_{\bar{t}}^t g(s) ds \quad (\text{B.22})$$

Facendo il cambio di variabile $x = u(t)$ nel primo integrale in (B.22), essendo $u(\bar{t}) = \bar{u}$, otteniamo

$$\int_{\bar{u}}^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} dx = G(t). \quad (\text{B.23})$$

¹⁸L'esempio (i) è di questa forma con $a(t) \equiv -k$ e $b \equiv 0$.

¹⁹Per il Teorema fondamentale del calcolo si ha $(e^{-\alpha})' = e^{-\alpha}(-\alpha)' = -ae^{-\alpha}$.

²⁰L'unicità deriva dal fatto che abbiamo dedotto la (B.19) direttamente dalla (B.16) (assumendo, naturalmente, che u fosse derivabile).

²¹Naturalmente, l'espressione 'variabili separabili' deriva dal fatto che il membro di destra di (B.21) è il prodotto di una funzione della sola 'variabile indipendente' t e della sola 'variabile dipendente' u .

Sia, ora, $F(x) := F(x; \bar{u})$ la funzione integrale di $1/f$ con punto base \bar{u} , ossia

$$F(x) := \int_{\bar{u}}^x \frac{dy}{f(y)}, \quad (\text{B.24})$$

e si osservi che (per il Teorema fondamentale del calcolo) $F'(x) = 1/f(x) \neq 0$, per $x \in J_0$, e dunque $x \in J_0 \mapsto F(x)$ è una funzione invertibile con inversa C^1 . Se denotiamo con F^{-1} la funzione inversa di F , da (B.23), troviamo $F(u(t)) = G(t)$ e quindi:

$$u(t) = (F^{-1} \circ G)(t). \quad (\text{B.25})$$

Si noti che la funzione $F^{-1} \circ G$ è di classe $C^1(I_0, J_0)$ dove I_0 è il più grande intervallo aperto contenente \bar{t} tale che²² $G(I_0) \subseteq F(J_0)$. Abbiamo dimostrato che l'unica soluzione derivabile $t \in I_0 \mapsto u(t) \in J_0$ tale che $u(\bar{t}) = \bar{u}$ è data da (B.25) e (B.24).

Sistemi lineari a coefficienti costanti

L'esponenziale di matrice²³ è lo strumento giusto per risolvere sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti: infatti, data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, da (1.89) segue che, $t \mapsto u(t) := e^{At}\bar{x}$ è differenziabile e verifica

$$u' = Au, \quad u(0) = \bar{x}. \quad (\text{B.26})$$

In effetti, si ha

Proposizione B.1 $t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{u}(t) := e^{At}\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è l'unica soluzione di (B.26).

Dimostrazione Sia $v \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ una soluzione di (B.26) con E un intervallo aperto di \mathbb{R} contenente 0. Mostriamo che si deve avere $v(t) = \bar{u}(t)$ per ogni $t \in E$. Supponiamo, infatti, per assurdo, che \bar{u} e v non coincidano su E e sia $w := \bar{u} - v$. Sia $I \subseteq E$ il più grande intervallo contenente 0 per cui $w(t) = 0$ per ogni $t \in I$. Secondo la nostra ipotesi I non coincide con E e quindi almeno uno dei suoi estremi è un punto $\tau \in E$. Poichè $w(t)$ è continua, $w(\tau) = 0$. La funzione w soddisfa $w' = Aw$ e $w(\tau) = 0$. Supponendo che τ sia l'estremo destro di I (il ragionamento nell'altro caso è perfettamente analogo), integrando la relazione $w' = Aw$ tra τ e $t > \tau$ con $t \leq \tau + \varepsilon$ ed ε sufficientemente piccolo, si ha²⁴

$$w(t) = w(\tau) + \int_{\tau}^t Aw(s) ds = A \int_{\tau}^t w(s) ds,$$

e, passando alle norme²⁵:

$$|w(t)| = \left| A \int_{\tau}^t w(s) ds \right| \leq \|A\| \left(\sup_{[\tau, \tau + \varepsilon]} |w| \right) \varepsilon \quad (\text{B.27})$$

e, quindi, (prendendo l'estremo superiore su $t \in [\tau, \tau + \varepsilon]$),

$$\sup_{[\tau, \tau + \varepsilon]} |w| \leq \|A\| \cdot \varepsilon \cdot \sup_{[\tau, \tau + \varepsilon]} |w|$$

il che, se scegliamo ε tale che $\|A\|\varepsilon < 1$, è assurdo a meno che $\sup_{[\tau, \tau + \varepsilon]} |w| = 0$; ma in tal caso I non sarebbe il più grande intervallo su cui $w = 0$, e si avrebbe una contraddizione. Dunque I ed E debbono coincidere, ossia, $\bar{u} = v$ su E . ■

La funzione vettoriale $v(t) = e^{A(t-\bar{t})}\bar{x}$ è soluzione di

$$v' = Av, \quad v(\bar{t}) = \bar{x}. \quad (\text{B.28})$$

D'altra parte se v verifica (B.28), allora $u(t) := v(\bar{t} + t)$ verifica (B.26) e quindi, per la Proposizione B.1, $u(t) = e^{At}\bar{x}$ e quindi $v(t) = e^{A(t-\bar{t})}\bar{x}$. In altri termini:

$v(t) = e^{A(t-\bar{t})}\bar{x}$ è l'unica soluzione di (B.28).

²²Si noti che $G(\bar{t}) = 0 = F(\bar{u})$.

²³Cfr. Complemento 1.5.

²⁴Per l'integrazione di funzioni a valori vettoriali si veda il Complemento 1.3 ed in particolare (1.67) e (1.66).

²⁵ $\|\cdot\|$ denota una qualunque norma matriciale rispetto ad una qualunque norma $|\cdot|$ in \mathbb{R}^n .

B.1.4 Osservazioni

Concludiamo questa breve introduzione alle equazioni differenziali ordinarie con alcune osservazioni.

- (i) Nel caso $f(\bar{x}) = 0$ abbiamo osservato che $u \equiv \bar{x}$ è soluzione di (B.20). Ma, in generale, tale soluzione potrebbe non essere unica. Per esempio, se $f(x) := x^{2/3}$, $g(t) \equiv 1$, (B.20) diventa

$$u' = u^{2/3} \quad (\text{B.29})$$

e se poniamo $\bar{x} = 0 = \bar{t}$, vediamo che (B.29) con la condizione $u(0) = 0$ ammette le soluzioni $u_1 \equiv 0$ e $u_2 := t^3/27$. Infatti vi sono infinite soluzioni $C^1(\mathbb{R})$ di (B.29) con $u(0) = 0$ tra le quali, per esempio,

$$u_s^+(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq s, \\ (t-s)^3/27, & \text{se } t > s, \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

dove s è un parametro non negativo.

- (ii) Un altro punto importante è che la (unica) soluzione (B.25) di (B.20) con $u(\bar{t}) = \bar{x}$ nel caso $f(\bar{x}) \neq 0$ è, in generale, definita solo in un intorno di \bar{t} . In effetti può succedere che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione u sia limitato anche se le funzioni f e g sono $C^\infty(\mathbb{R})$, come mostra il seguente esempio: sia $f(x) = x^2$, $g(t) \equiv 1$ e cerchiamo di determinare la soluzione di

$$u' = u^2, \quad u(\bar{t}) = \bar{x}, \quad (\text{B.31})$$

con $\bar{x} \neq 0$. Calcoliamo la funzione integrale $x \mapsto s = F(x)$:

$$F(x) = \int_{\bar{x}}^x \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_{\bar{x}}^x = \frac{1}{\bar{x}} - \frac{1}{x} \quad (\text{B.32})$$

la cui funzione inversa è data da

$$F^{-1}(s) = \frac{1}{\frac{1}{\bar{x}} - s}. \quad (\text{B.33})$$

Essendo, nel presente caso, $G(t) := \int_{\bar{t}}^t ds = t - \bar{t}$, otteniamo

$$u(t) = F^{-1} \circ G(t) = \frac{1}{T_e - t}, \quad T_e := \bar{t} + \frac{1}{\bar{x}}. \quad (\text{B.34})$$

L'intervallo I su cui è definita la soluzione $u(t)$ dipende dal segno di \bar{x} ed è dato da

$$I := I(\bar{t}, \bar{x}) := \begin{cases} (-\infty, T_e), & \text{se } \bar{x} > 0, \\ (T_e, +\infty), & \text{se } \bar{x} < 0. \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

Nella singolarità T_e , $u(t)$ ha un asintoto verticale, in altri termini, la soluzione ‘esplode in tempi finiti’.

- (iii) Se denotiamo con $u(t; \bar{t}, \bar{x})$ la soluzione $u(t)$ (B.34) dell'equazione (B.31) con $\bar{x} \neq 0$, si vede immediatamente che

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} u(t; \bar{t}, \bar{x}) = 0.$$

In effetti, come osservato più volte, $t \in \mathbb{R} \mapsto u(t) \equiv 0$ è soluzione di (B.31) con $\bar{x} = 0$, ma la soluzione nulla non si ottiene col metodo di separazione di variabili (dove abbiamo usato l'ipotesi che $\bar{x} \neq 0$). Rimane il dubbio che ci possa essere un'altra soluzione del problema (B.31) con $\bar{x} = 0$ che non sia identicamente nulla, come accade nell'esempio

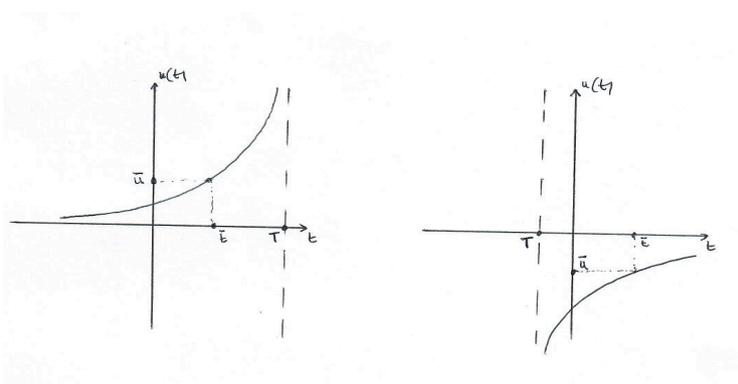


Figura B.1: La soluzione $u(t)$ di (B.31)

del punto (i). Ma questo non è il caso: $u(t) \equiv 0$ è l'unica soluzione di (B.31) con $\bar{x} = 0$. Infatti, sia $t \in I \rightarrow u(t)$ una qualunque soluzione di (B.31) con $\bar{x} = 0$ e $\bar{t} \in I$. Allora, se $v(t) := \int_{\bar{t}}^t u^2(s) ds$, si ha

$$0 = e^{-v}(u' - u^2) = (e^{-v}u)',$$

il che implica che $e^{-v}u$ è costante su I ed essendo $e^{-v(\bar{t})}u(\bar{t}) = 0$ si ha che $u(t)$ è identicamente nulla su I . Quindi $u \equiv 0$ è l'unica soluzione di (B.31) con $\bar{x} = 0$.

- (iv) Negli esempi sinora discussi – a parte il caso dell'esempio (i) di questo paragrafo – abbiamo visto che il problema di determinare la soluzione $u(t)$ di un sistema di equazioni differenziale

$$u'(t) = f(u(t), t) \quad \Longleftrightarrow \quad u'_i(t) = f_i(u(t), t), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad (\text{B.36})$$

con 'dato iniziale' $u(\bar{t}) = \bar{x}$ assegnato, ammette una ed una sola soluzione, e che tale soluzione, in generale, è definita in un opportuno intorno di \bar{t} . Tale problema prende il nome di *problema di Cauchy* o *problema ai valori iniziali*²⁶.

Un risultato fondamentale che dimostreremo nella prossima sezione è che il *problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione locale in*²⁷ t , assumendo che la funzione f sia localmente lipschitziana (in x uniformemente in t).

Si noti che la funzione $u \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^{2/3}$ (cfr. esempio (i) di questo paragrafo) non è lipschitziana in un intorno di 0.

Vi sono naturalmente molti altri risultati riguardo esistenza e/o unicità di equazioni differenziali²⁸; per esempio, vale il teorema di Peano, secondo il quale, se f in (B.39) è continua, allora esiste sempre almeno una soluzione locale (che, come sappiamo, può non essere unica).

- (v) Dal punto di vista fisico, trovare una soluzione di (B.39) significa trovare una curva (o una 'orbita') $t \in I \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^n$, con I intervallo che contiene \bar{t} , che passi per \bar{x} nell'istante \bar{t} e tale che la sua velocità $u'(t)$ (che geometricamente rappresenta un vettore tangente alla curva descritta da u al variare di t) coincida col 'campo vettoriale' $f(u(t), t)$.

²⁶ Ancora una volta, si pensa all'interpretazione di t come 'tempo' ed all'equazione differenziale (B.36) come ad una 'equazione di evoluzione' per la funzione incognita u .

²⁷ Ossia, definita in un opportuno intorno I di \bar{t} .

²⁸ Cfr. [E. Coddington, N. Levinson, "The theory of ordinary differential equations", McGraw-Hill (1955)], uno dei testi di riferimento fondamentali sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

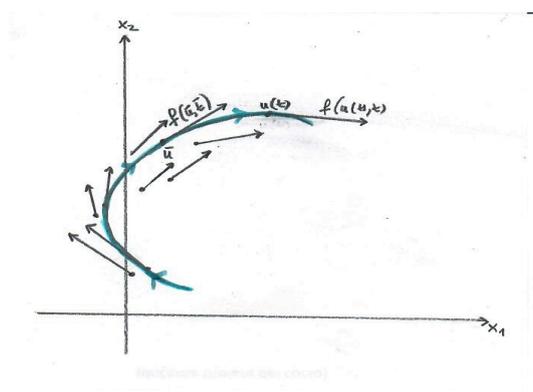


Figura B.2: Campo vettoriale $f(x, t)$ e orbita $t \rightarrow u(t)$

(vi) Come visto, in alcuni (rari) casi, è possibile trovare una ‘formula risolutiva’ di una equazione (o di un sistema di equazioni) differenziale (cfr. § B.1.3). Ma, anche in tali casi, non è sempre ovvio ricavare informazioni *qualitative* sulla soluzione, specialmente per tempi lunghi. Si pensi, per esempio, al caso (assai semplice) delle equazioni scalari a variabili separabili (B.25): la soluzione generale è data in forma implicita ed in termini di integrali, che, di norma, non sono calcolabili esplicitamente; in particolare, può non essere immediato stabilire, per esempio, il comportamento asintotico (per $t \rightarrow \pm\infty$) della soluzione.

D’altra parte, abbiamo già sottolineato come ‘semplici’ equazioni differenziali possano avere soluzioni estremamente complicate, con evoluzione non prevedibile²⁹.

In effetti, il punto di vista moderno sulle equazioni differenziali ordinarie, introdotto, tra gli altri dal grande matematico e fisico teorico Henri Poincaré³⁰ a partire dalla seconda metà del 1800, è proprio quello di determinare il ‘comportamento’ per tempi lunghi delle soluzioni, dando particolare rilevanza a determinate soluzioni (periodiche, quasi-periodiche, omocline, eterocline) ed allo loro stabilità. Questo nucleo di idee è alla base della moderna teoria dei sistemi dinamici³¹.

B.2 Teorema di esistenza e unicità locale

In questo paragrafo discutiamo il problema di Cauchy e il fondamentale teorema di Picard–Lindelöf³² che, sotto opportune ipotesi, garantisce *esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati iniziali* di soluzioni locali.

La dimostrazione sarà basata su alcuni lemmi, di notevole interesse per sé stessi.

B.2.1 Definizioni ed enunciato del Teorema

Cominciamo con la definizione precisa di soluzione (locale) di un problema di Cauchy e con un’osservazione preliminare:

Osservazione B.2 (i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ e $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$. Ad una funzione $v \in C(I, \mathbb{R}^n)$, I intervallo contenente \bar{t} , tale che $(v(t), t) \in A$ per ogni $t \in I$, possiamo

²⁹Cfr. Esempio (viii) di § B.1.1 e nota 11, o Esempio (xiii) di § B.1.1.

³⁰https://it.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9

³¹<http://www.scholarpedia.org/article/Dynamics>

³²https://en.wikipedia.org/wiki/Picard%E2%80%93Lindel%C3%B6f_theorem e in particolare l’articolo [Lindelöf, E. (1894). “Sur l’application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre”. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*. 116: 454–457] in cui Lindelöf discute una generalizzazione del metodo iterativo introdotto da Picard.

associare una nuova funzione $\Phi(v) := \Phi(v; \bar{x}, \bar{t})$ definita come segue:

$$t \in I \mapsto \Phi(v)(t) := \Phi(v; \bar{x}, \bar{t})(t) := \bar{x} + \int_{\bar{t}}^t f(v(s), s) ds \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.37})$$

Per il Teorema fondamentale del calcolo, $\Phi(v)$ è una funzione $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ e³³

$$(\Phi(v; \bar{x}, \bar{t}))'(t) = f(v(t), t), \quad \Phi(v; \bar{x}, \bar{t})(\bar{t}) = \bar{x}. \quad (\text{B.38})$$

L'operatore $v \mapsto \Phi(v)$ prende il nome di **operatore di Picard**.

(ii) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ e $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$. Una funzione $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, I intervallo contenente \bar{t} , tale che $(v(t), t) \in A$ per ogni $t \in I$, soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t), t), \\ u(\bar{t}) = \bar{x}, \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

se e solo se u è un **punto fisso** dell'operatore di Picard:

$$u = \Phi(u; \bar{x}, \bar{t}) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad u(t) = \bar{x} + \int_{\bar{t}}^t f(u(s), s) ds. \quad (\text{B.40})$$

Infatti (B.40) si ottiene immediatamente da (B.39) integrando ambo i membri dell'equazione differenziale in (B.39) tra \bar{t} e t ed usando il Teorema fondamentale del calcolo, mentre se vale (B.40), da (B.38) segue che u è soluzione di (B.39).

Definizione B.3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un insieme aperto. Denotiamo con $\text{Lip}_*(A, \mathbb{R}^n)$ il sottoinsieme di $C(A, \mathbb{R}^n)$ formato dalle funzioni **localmente lipschitziane rispetto a x uniformemente in t** , ossia, tali che:

$$\forall K \subseteq A \text{ compatto } \exists L > 0 \mid |f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \quad \forall (x, t), (y, t) \in K. \quad (\text{B.41})$$

Osservazione B.4 (i) La (B.41) è equivalente a richiedere che per ogni $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$ esistono

$$D := D(\bar{x}, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \bar{x}| \leq \rho\}, \quad J := J(\bar{t}, \tau) := [\bar{t} - \tau, \bar{t} + \tau], \quad (\text{B.42})$$

con $\rho, \tau > 0$ tali che $D \times J \subseteq A$ e

$$\exists L > 0 \mid |f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in D, \forall t \in J. \quad (\text{B.43})$$

Dimostrazione Se vale (B.41), vale (B.43) essendo $D \times J$ in (B.42) compatto. Dimostriamo il viceversa e assumiamo che per ogni $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$, esistono $\rho, \tau > 0$, D e J come in (B.42) per cui vale (B.43) con $L(\rho, \tau) := L$. Sia $K \subseteq A$ compatto. Chiaramente $K \subseteq \bigcup_{(\bar{x}, \bar{t}) \in K} B(\rho, \tau)$ con $B(\rho, \tau) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \bar{x}| < \rho\} \times (\bar{t} - \tau, \bar{t} + \tau)$ e per la proprietà di Heine–Borel (cfr. § 5, Cap. 1), esistono N insiemi aperti $B_i := B(\rho_i, \tau_i)$ tali che $K \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq N} B_i$. Se $L = \min\{L_i\}$ con $L_i = L(\rho_i, \tau_i)$, allora vale (B.41). ■

(ii) Se $f \in C^1(A)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, allora dal teorema del valor medio (Proposizione 2.18–(i)) segue che f è localmente lipschitziana rispetto a x uniformemente in t nell'intorno di ogni punto $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$: infatti, se $\rho, \tau > 0$ sono tali che $D \times J := D(\bar{x}, \rho) \times J(\bar{t}, \tau) \subseteq A$, si può prendere $L := \max_{D \times J} |\nabla_x f|$; cfr. (2.39).

Il seguente teorema è il risultato più importante del capitolo.

Teorema B.5 (Picard–Lindelöf) Sia A un aperto di \mathbb{R}^{n+1} e $f \in \text{Lip}_*(A, \mathbb{R}^n)$. Sia $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$ e siano D e J come nella Definizione B.3. Definiamo³⁴:

$$M := \max_{D \times J} |f|, \quad T := \min\{\tau, \rho/M\}, \quad I := [\bar{t} - T, \bar{t} + T]. \quad (\text{B.44})$$

Allora, esiste una ed una sola soluzione $u \in C^1(I, D)$ del problema di Cauchy (B.39).

La dimostrazione sarà data alla fine del § B.2.4.

³³Si applichi il Teorema fondamentale del calcolo componente per componente: si noti che, essendo f continua, l'integrando $t \mapsto f_i(u(t), t)$ è una funzione continua dall'intervallo I in \mathbb{R} .

³⁴Se $M = 0$, si ha che $f \equiv 0$ e quindi il relativo problema di Cauchy è banale: l'unica soluzione di (B.39) è data da $u(t) \equiv 0$ (e, in particolare $T = +\infty$).

B.2.2 Lemma di Picard

Il primo dei lemmi su cui si basa la dimostrazione del Teorema B.5 fornisce un *algoritmo* – basato sull'iterazione dell'operatore di Picard – per costruire una soluzione di (B.39):

Lemma B.6 (Picard) *Siano A , f , D e I come nel Teorema B.5. Si definiscano iterativamente, per $k \geq 0$, le funzioni*

$$u_k := \begin{cases} \bar{x}, & \text{se } k = 0, \\ \Phi(u_{k-1}; \bar{x}, \bar{t}) := \bar{x} + \int_{\bar{t}}^t f(u_{k-1}(s), s) ds, & \text{se } k \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

Allora, per ogni $k \geq 1$, $u_k \in C^1(I, D)$ e

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t - \bar{t}|)^k}{k!}, \quad \forall |t - \bar{t}| \leq T. \quad (\text{B.46})$$

La successione $\{u_k\}$ converge uniformemente ad una soluzione $C^1(I, D)$ di (B.39).

Dimostrazione Dimostriamo, innanzitutto, che la successione u_k è ben definita, ossia che $u_k \in C(I, D)$ per ogni k (cosa necessaria per poter definire $\Phi(u_k; \bar{x}, \bar{t})$). Per $k = 0$, $u_0 \equiv \bar{x} \in C(I, D)$ ovviamente. Sia, ora, $k \geq 1$ e assumiamo che $u_{k-1} \in C(I, D)$, allora $\Phi(u_{k-1}; \bar{x}, \bar{t})$ è ben definita e quindi

$$|u_k(t) - \bar{x}| = \left| \int_{\bar{t}}^t f(u_{k-1}(s), s) ds \right| \leq \left| \int_{\bar{t}}^t |f(u_{k-1}(s), s)| ds \right| \stackrel{(\text{B.44})}{\leq} TM \stackrel{(\text{B.44})}{\leq} \rho,$$

il che mostra che $u_k(t) \in D$ per ogni $t \in I$. Dal Teorema fondamentale del calcolo segue poi che $u_k \in C^1(I, D) \subseteq C(I, D)$.

Dimostriamo, ora, (B.46). Sia, per $k \geq 1$, $w_k := u_k - u_{k-1}$ e procediamo per induzione su $k \geq 1$. Per $k = 1$ e per ogni $t \in I$, si ha

$$|w_1(t)| = |\Phi(u_0; \bar{x}, \bar{t})(t) - u_0| = \left| \int_{\bar{t}}^t f(\bar{x}, s) ds \right| \leq \left| \int_{\bar{t}}^t |f(\bar{x}, s)| ds \right| \stackrel{(\text{B.44})}{\leq} M|t - \bar{t}|,$$

e quindi (B.46) vale per $k = 1$. Assumiamo ora vera la (B.46) per un $k \geq 1$ e dimostriamola per $k + 1$. Per ogni $t \in I$ si ha:

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(t)| &= |u_{k+1}(t) - u_k(t)| = \left| \int_{\bar{t}}^t (f(u_k(s), s) - f(u_{k-1}(s), s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\bar{t}}^t |f(u_k(s), s) - f(u_{k-1}(s), s)| ds \right| \\ &\stackrel{(\text{B.43})}{\leq} L \left| \int_{\bar{t}}^t |u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \right| \\ &= L \left| \int_{\bar{t}}^t |w_k(s)| ds \right| \stackrel{(\text{B.46})}{\leq} ML^k \left| \int_{\bar{t}}^t \frac{|s - \bar{t}|^k}{k!} ds \right| \\ &= \frac{M}{L} \frac{(L|t - \bar{t}|)^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue subito distinguendo i due casi $\bar{t} \leq t \leq \bar{t} + T$ e $\bar{t} - T \leq t \leq \bar{t}$.

Ora, $u_k = \bar{x} + \sum_{j=1}^k w_j$ e da (B.46) segue che la serie $\sum w_j$ converge totalmente su I e quindi

converge uniformemente su I ad una funzione $u \in C(I, D)$ (Proposizione 1.56). Si noti che $f(u_k, t) \rightarrow f(u, t)$ uniformemente su I (essendo $|f(u_k, t) - f(u, t)| \leq L|u_k - u|$) e che per (B.38), $u'_k = f(u_{k-1}(t), t) \rightarrow f(u(t), t)$ uniformemente su I . Dunque, dalla Proposizione 1.61 segue che $u'_k \rightarrow u'$ uniformemente su I e che $u' = f(u, t)$. Infine, $u_k(\bar{t}) = \bar{x}$ per ogni k e quindi $u(\bar{t}) = \bar{x}$ cosicché u è soluzione di (B.39). ■

B.2.3 Lemmi di Gronwall

Il prossimo lemma, noto come ‘Lemma di Gronwall’³⁵, è un semplice risultato per funzioni di una variabile reale, ma è di grande utilità nello studio generale delle equazioni differenziali. Qui, da esso dedurremo l’unicità nel problema di Cauchy (B.39) e la dipendenza continua delle soluzioni dal dato iniziale.

Lemma B.7 (Gronwall) *Sia I un intervallo e $\alpha, \delta \geq 0$. Sia $g \in C(I, [0, +\infty))$ tale che, per un $\bar{t} \in I$, si abbia*

$$g(t) \leq \delta + \alpha \left| \int_{\bar{t}}^t g(s) ds \right|, \quad \forall t \in I. \quad (\text{B.47})$$

Allora, per ogni $t \in I$, si ha

$$g(t) \leq \delta e^{\alpha|t-\bar{t}|}. \quad (\text{B.48})$$

Dimostrazione Per $\alpha = 0$ il lemma è una tautologia. Assumiamo $\alpha > 0$. Supponiamo prima che $t \geq \bar{t}$. Sia $G(t) := \int_{\bar{t}}^t g(s) ds$; allora $G \in C^1(I)$ e $G(\bar{t}) = 0$ e, per il Teorema fondamentale del calcolo e (B.47), si ha

$$G' = g \leq \delta + \alpha G. \quad (\text{B.49})$$

Moltiplicando tale relazione per $e^{-\alpha t}$, vediamo che essa è equivalente alla disequaglianza

$$(Ge^{-\alpha t})' \leq \delta e^{-\alpha t}. \quad (\text{B.50})$$

Integrando (B.50) tra \bar{t} e t e ricordando che $G(\bar{t}) = 0$ si ottiene

$$G(t)e^{-\alpha t} \leq \delta \frac{e^{-\alpha \bar{t}} - e^{-\alpha t}}{\alpha}, \quad (\text{B.51})$$

ossia $G \leq \delta \alpha^{-1}(e^{\alpha(t-\bar{t})} - 1)$. Ricordando che $g \leq \delta + \alpha G$, si ottiene l’asserto (quando $t \geq \bar{t}$).

Nel caso $t < \bar{t}$, si ha che $g(t) \leq \delta + \alpha \int_t^{\bar{t}} g(s) ds$, e ponendo, come prima,

$$G(t) := \int_{\bar{t}}^t g(s) ds = - \int_t^{\bar{t}} g(s) ds,$$

si ottiene che $G' = g \leq \delta - \alpha G$ che è equivalente a $(Ge^{\alpha t})' \leq \delta e^{\alpha t}$. Integrando tale relazione tra t e \bar{t} , si ottiene $-G\alpha \leq \delta[e^{\alpha(\bar{t}-t)} - 1]$ da cui segue che $g \leq \delta e^{\alpha(\bar{t}-t)} = \delta e^{\alpha|t-\bar{t}|}$. ■

Anche se non intervengono nella discussione del Teorema di Picard–Lindelöf, includiamo in questo paragrafo altri due semplici risultati di calcolo in una variabile, che utilizzeremo nel § B.3.4 sull’analisi qualitativa di moti unidimensionali: il primo è una versione differenziale del Lemma di Gronwall, il secondo è un ‘teorema di confronto’ per soluzioni di disequazioni differenziali.

Lemma B.8 (Secondo Lemma di Gronwall) *Sia I un intervallo, $\bar{t} \in I$, $L > 0$. Assumiamo che $u \in C^1(I, \mathbb{R})$ sia tale che*

$$u'(t) \leq L|u(t)|, \quad \forall t \in I. \quad (\text{B.52})$$

Allora, se $u(\bar{t}) \leq 0$, si ha che $u(t) \leq 0$, per ogni $t \geq \bar{t}$; se $u(\bar{t}) \geq 0$, si ha che $u(t) \geq 0$, per ogni $t \leq \bar{t}$.

³⁵https://it.wikipedia.org/wiki/Lemma_di_Gronwall#cite_note-gronwall-1

Dimostrazione Innanzitutto, osserviamo che è sufficiente dimostrare il primo caso (il secondo caso segue dal primo sostituendo u con $-u$). Sia $u(\bar{t}) \leq 0$ e sia $\tau = \sup\{t \in I \mid u(t) \leq 0\}$. L'asserto è equivalente a dimostrare che $\tau = b := \sup I$. Supponiamo, per assurdo, che $\tau < b$. Allora $u(\tau) = 0$ e per ogni $s \in (\tau, b)$ si ha che $u(t) > 0$ per ogni $t \in J := (\tau, s]$. Fissiamo un tale s , allora, da (B.52) segue che $u' \leq Lu$ su J , ossia, $u' - Lu \leq 0$, che è equivalente a $(e^{-Lt}u)' \leq 0$. Integrando tale relazione tra τ e s otteniamo $e^{-Ls}u(s) \leq e^{-L\tau}u(\tau) = 0$, che è una contraddizione, essendo $u(s) > 0$. ■

Corollario B.9 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g \in C(A, \mathbb{R})$ con g localmente lipschitziana in x uniformemente in t . Sia I un intervallo, $\bar{t} \in I$ e siano $u, v \in C(I, \mathbb{R})$ tali che $(t, u(t)) \in A$ e $(t, v(t)) \in A$ per ogni $t \in I$ e tali che

$$\begin{cases} u'(t) \leq f(u(t), t) \\ v'(t) \geq g(v(t), t) \end{cases}, \quad (\text{B.53})$$

$$f(u(t), t) \leq g(u(t), t). \quad (\text{B.54})$$

Allora, se $u(\bar{t}) \leq v(\bar{t})$ si ha che $u(t) \leq v(t)$ per ogni $t \in I$, $t \geq \bar{t}$; se $u(\bar{t}) \geq v(\bar{t})$ si ha che $u(t) \geq v(t)$ per ogni $t \in I$, $t \leq \bar{t}$.

Dimostrazione Siano $a < \bar{t} < b$, $a, b \in I$ e sia

$$\Gamma = \{(u(t), t) \mid t \in [a, b]\} \cup \{(v(t), t) \mid t \in [a, b]\},$$

e $K \subseteq A$ un qualunque compatto che contenga Γ . Sia $L > 0$ tale che $|g(x, t) - g(y, t)| \leq L|x - y|$, per ogni $(x, t), (y, t) \in K$. Allora, se $w := u - v$ segue che

$$\begin{aligned} w' &= u' - v' \stackrel{(\text{B.53})}{\leq} f(u, t) - g(v, t) \stackrel{(\text{B.54})}{\leq} g(u, t) - g(v, t) \leq |g(u, t) - g(v, t)| \leq L|u - v| \\ &= L|w|, \end{aligned}$$

e la tesi, per $t \in [a, b]$, segue dal Lemma B.8 con u sostituito da w e I da $[a, b]$. Dall'arbitrarietà di a e b , segue la tesi per $t \in I$. ■

Spesso, il Corollario B.9 si applica alle equazioni (piuttosto che alle disequazioni) differenziali, nella seguente forma (che è un caso speciale del Corollario B.9):

Corollario B.10 (Teorema di confronto) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g \in C(A, \mathbb{R})$, $f \leq g$, e g localmente lipschitziana in x uniformemente in t . Sia I un intervallo, $\bar{t} \in I$ e siano $u, v \in C(I, \mathbb{R})$ tali che $(t, u(t)) \in A$ e $(t, v(t)) \in A$ per ogni $t \in I$ e tali che

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(u(t), t), \\ v'(t) &= g(v(t), t). \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Allora,

$$\begin{aligned} u(\bar{t}) \leq v(\bar{t}) &\implies u(t) \leq v(t), \quad \forall t \geq \bar{t}, \quad t \in I; \\ u(\bar{t}) \geq v(\bar{t}) &\implies u(t) \geq v(t), \quad \forall t \leq \bar{t}, \quad t \in I; \\ u(\bar{t}) = v(\bar{t}) &\implies \begin{cases} u(t) \leq v(t), & \forall t \geq \bar{t}, \quad t \in I, \\ u(t) \geq v(t), & \forall t \leq \bar{t}, \quad t \in I. \end{cases} \end{aligned}$$

B.2.4 Unicità e dipendenza continua dai dati iniziali

Dal Lemma di Gronwall segue facilmente il seguente risultato:

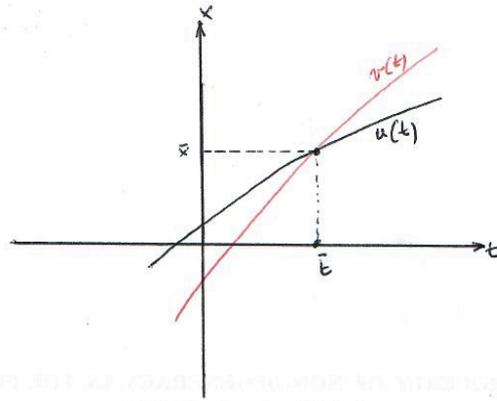


Figura B.3: Due soluzioni di $\dot{u} = f(u, t)$ e $\dot{v} = g(v, t)$ con $f \leq g$

Proposizione B.11 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto e $f \in \text{Loc}_*(A, \mathbb{R}^n)$. Siano, per $i = 1, 2$, $(\bar{x}_i, \bar{t}) \in A$ e $u_i \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ soluzioni dei problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u_i'(t) = f(u_i(t), t), & \forall t \in I, \\ u_i(\bar{t}) = \bar{x}_i, \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

con $I := [a, b]$, $a \leq \bar{t} \leq b$ e

$$\Gamma = \{(u_1(t), t) \mid t \in [a, b]\} \cup \{(u_2(t), t) \mid t \in [a, b]\} \subseteq A.$$

Sia L la costante di Lipschitz in x relativa al compatto Γ . Allora, per ogni $t \in I$

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| e^{L|t - \bar{t}|}. \quad (\text{B.57})$$

In particolare, se $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, allora $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in I$.

Dimostrazione Sia $g(t) := |u_1(t) - u_2(t)|$. Poiché le u_i verificano l'equazione integrale (B.40) (con \bar{x}_i al posto di \bar{x} e u_i al posto di u), si ha che

$$\begin{aligned} g(t) &= \left| \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \int_{\bar{t}}^t (f(u_1(s), s) - f(u_2(s), s)) ds \right| \\ &\leq |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + \left| \int_{\bar{t}}^t |f(u_1(s), s) - f(u_2(s), s)| ds \right| \\ &\leq |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + L \left| \int_{\bar{t}}^t |u_1(s) - u_2(s)| ds \right| \\ &= |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + L \left| \int_{\bar{t}}^t g(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Dal Lemma di Gronwall con I sostituito da $[a, b]$, $\delta = |u_1 - u_2|$, $\alpha = L$, segue (B.57) per $t \in [a, b]$. L'ultima affermazione segue da (B.57). ■

Osservazione B.12 (Dipendenza continua dai dati iniziali) La Proposizione B.11 asserisce che le soluzioni locali del problema di Cauchy dipendono in modo continuo dal dato iniziale, infatti vi dipendono in modo lipschitziano con costante di Lipschitz data da $e^{L|t - \bar{t}|}$; cfr. (B.57).

Si noti, anche, che due soluzioni inizialmente vicine potrebbero allontanarsi l'una dall'altra, per $t > \bar{t}$ (o $t < \bar{t}$), ad un tasso *esponenziale*. In effetti tale fenomeno può realmente accadere: basti pensare al caso scalare $u' = Lu$ con $L > 0$. In tal caso $u_i(t) = e^{L(t-\bar{t})}\bar{x}_i$ e $|u_1(t) - u_2(t)| = e^{L(t-\bar{t})}|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$, il che mostra che la costante lipschitziana in (B.57) è ottimale.

La dimostrazione del Teorema di Picard–Lindelöf è, a questo punto, immediata:

Dimostrazione (del Teorema di Picard–Lindelöf B.5) Dal Lemma di Picard B.6 segue che $u = \lim \Phi(u_k; \bar{x}, \bar{t})$ (cfr. (B.45)) è una soluzione $C^1(I, D)$ del problema di Cauchy (B.39) e tale soluzione è unica per la Proposizione B.11 applicata con $A = D \times I$. ■

Osservazione B.13 (i) L'enunciato del Teorema B.5 è *quantitativo*, ossia, fornisce una stima del dominio e del codominio della soluzione locale del problema di Cauchy. Una versione sintetica qualitativa del Teorema di esistenza ed unicità locale per equazioni differenziali ordinarie che discende immediatamente dal Teorema di Picard–Lindelöf è la seguente:

Teorema di esistenza e unicità locale per EDO³⁶ (enunciato qualitativo)

Sia $f : (x, t) \in A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}^n$ una funzione localmente lipschitziana rispetto a x uniformemente in t . Allora, esiste una ed una sola soluzione locale del problema di Cauchy (B.39).

(ii) Si noti che nell'enunciato del Teorema di Picard–Lindelöf, la costante di Lipschitz L non appare; essa compare, come appena osservato, nella dipendenza dai dati iniziali oltre che nella dimostrazione del Lemma di Picard).

(iii) (**Regolarità in t**) Le soluzioni (classiche³⁷) del problema di Cauchy sono, per definizione, differenziabili. In effetti, se il campo f è più regolare, le soluzioni di un'equazione differenziale sono automaticamente più regolari anch'esse. Per esempio, vale la seguente affermazione:

Sia $k \in \mathbb{N}$, A un aperto di \mathbb{R}^{n+1} , $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$, I un intervallo, $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ tale che $(u(t), t) \in A$ per ogni $t \in I$ e $u' = f(u(t), t)$, per ogni $t \in I$. Allora $u \in C^{k+1}(I)$.

Dimostrazione Dimostriamo, per induzione su $1 \leq j \leq k+1$, che $u \in C^j(I)$. Per ipotesi $u \in C^1$. Assumiamo ora $u \in C^j(I)$ per un $1 \leq j \leq k$ e dimostriamo che $u \in C^{j+1}(I)$. Dalla Proposizione 2.33, segue (essendo $k \geq j$) che la funzione composta $t \in I \mapsto f(u(t), t)$ è di classe $C^j(I)$. Ma, per l'equazione differenziale, $f(u(t), t) = u'(t)$ e quindi $t \mapsto u'(t) \in C^j(I)$, che è equivalente a dire che $u \in C^{j+1}(I)$. ■

Questa osservazione permette di calcolare, iterativamente, le derivate successive di u dall'equazione $u' = f(u, t)$. Per esempio, se $f \in C^1(A)$, allora

$$u'' = f_x(u, t)u' + f_t(u, t) = f_x(u, t)f(u, t) + f_t(u, t), \quad (\text{B.58})$$

(dove u e le sue derivate sono calcolate in t), o, in componenti,

$$u''_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u, t)u'_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}(u, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u, t)f_j(u, t) + \frac{\partial f_i}{\partial t}(u, t). \quad (\text{B.59})$$

B.3 Soluzioni massimali e soluzioni globali

L'unicità locale permette di estendere, in modo massimale, le soluzioni locali del problema di Cauchy. In questa sezione daremo la definizione di soluzione massimale di un problema di Cauchy, discuteremo quando è possibile estendere una soluzione locale. Discuteremo, poi, qual

³⁶Acronimo per 'Equazioni Differenziali Ordinarie'.

³⁷Si possono considerare classi di soluzioni più generali ('soluzioni deboli') e non necessariamente differenziabili di equazioni differenziali, cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Weak_solution; in questo testo considereremo solo soluzioni *classiche* ossia differenziabili.

è il comportamento di una soluzione massimale quando uno degli estremi su cui è definita è finito ed, infine, daremo un criterio per poter estendere per $t \rightarrow \pm\infty$ soluzioni locali.

In questa sezione, se non altrimenti specificato, A denota un aperto di \mathbb{R}^{n+1} , U un aperto di \mathbb{R}^n , f una funzione in $\text{Lip}_*(A, \mathbb{R}^n)$.

B.3.1 Definizioni

Definizione B.14 Se $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$, denotiamo $\mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x}) := \mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$ l'insieme di tutte le soluzioni classiche (locali) del problema di Cauchy (B.39), più precisamente: $u \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$ se e solo se esiste un intervallo aperto I_u tale che: $\bar{t} \in I_u$; $u \in C^1(I_u, \mathbb{R}^n)$; $(u(t), t) \in A$ per ogni $t \in I_u$; $u(\bar{t}) = \bar{x}$; $u' = f(u(t), t)$ per ogni $t \in I_u$.

L'insieme delle soluzioni classiche $\mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$ è sempre diverso dall'insieme vuoto, grazie al già citato Teorema di Peano (cfr. Osservazione (iv) in § B.1.4); inoltre, nel caso si abbia unicità delle soluzioni locali (cosa garantita, ad esempio, se f è localmente lipschitziana) l'insieme $\mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$ è un insieme parzialmente ordinato:

Lemma B.15 Se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$, allora $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in I_{u_1} \cap I_{u_2}$.

Dimostrazione Segue immediatamente dalla Proposizione B.11. ■

Definizione B.16 (i) Se $u, v \in \mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$ e $I_u \subseteq I_v$ diremo che v **estende** u (o che v è un'estensione di u) e scriveremo $u \prec v$; se $I_u \subsetneq I_v$, diremo che v **estende** u **propriamente** (o che v è un'estensione propria di u). Se $I_u = (a, b)$ e $I_v = (a, c)$ con $c > b$ [rispettivamente, $I_v = (c, b)$ con $c < a$] diremo che v estende propriamente u a destra [risp., a sinistra] o che v è un'estensione destra [risp. sinistra] propria di u .

(ii) Poniamo

$$I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}) := \bigcup_{u \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})} I_u, \quad (\text{B.60})$$

e, per $t \in I_{\max}(\bar{t}, \bar{x})$, definiamo $u_{\max}(t; \bar{t}, \bar{x}) := u(t)$ dove $u \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$ è tale che³⁸ $t \in I_u$. L'intervallo $I_{\max}(\bar{t}, \bar{x})$, che si denota anche (T_-, T_+) o $(T_-(\bar{t}, \bar{x}), T_+(\bar{t}, \bar{x}))$, prende il nome di **intervallo massimale di esistenza** per (B.39) e la funzione u_{\max} prende il nome di **soluzione massimale del problema di Cauchy** (B.39). Spesso denoteremo la soluzione massimale $u_{\max}(t; \bar{t}, \bar{x})$ con il simbolo $\phi^t(\bar{t}, \bar{x})$.

(iii) Se $I_{\max} = \mathbb{R}$ diremo che u_{\max} è una **soluzione globale** di (B.39).

Osservazione B.17 (i) Nella definizione data di u_{\max} , il valore $u_{\max}(t)$ non dipende dalla particolare scelta di $u \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$: se $v \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$ è anche tale che $t \in I_v$, per il Lemma B.15, $v(t) = u(t)$. Dunque la definizione di u_{\max} nella Definizione B.16–(ii) è ben posta. Si noti che dalla definizione data segue che

$$\phi^{\bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{x}, \quad \forall (\bar{x}, \bar{t}) \in A. \quad (\text{B.61})$$

(ii) Chiaramente, la relazione ' \prec ' è una relazione d'ordine parziale su $\mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$ e u_{\max} è l'elemento massimale in $\mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$ (ossia $u \prec u_{\max}$ per ogni $u \in \mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$), o, in altri termini, u_{\max} non ammette estensioni proprie. Dunque possiamo identificare $\mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$ con la soluzione massimale $t \in I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}) \mapsto \phi^t(\bar{t}, \bar{x})$: ogni elemento di $u \in \mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$ non è altro che una restrizione di $t \rightarrow \phi^t(\bar{t}, \bar{x})$ ad un intervallo aperto $I_u \subseteq I_{\max}(\bar{t}, \bar{x})$ che contenga \bar{t} .

(iii) Per ogni $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$, si ha

$$I_{\max}(s, \phi^s(\bar{t}, \bar{x})) = I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}), \quad \forall s \in I := I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}), \quad (\text{B.62})$$

$$\phi^t(s, \phi^s(\bar{t}, \bar{x})) = \phi^t(\bar{t}, \bar{x}), \quad \forall t, s \in I. \quad (\text{B.63})$$

il che mostra che $v \in C^1((a, b + \varepsilon))$ e, dunque, che $v \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$.

L'affermazione corrispondente per l'estremo sinistro si dimostra in maniera analoga. ■

Osservazione B.19 (i) Nel problema di Cauchy (B.31) con $(A = \mathbb{R}^2)$ e $\bar{x} \neq 0$, la soluzione u trovata col metodo di separazione delle variabili (B.35) è definita sulla semiretta $I_u = I(\bar{t}, \bar{x})$ definita in (B.35): poiché il $\lim_{t \rightarrow T_e} u(t)$ non è finito, dal Lemma B.18 segue che $I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}) = I(\bar{t}, \bar{x})$, intervallo che ha uno dei due estremi finito.

(ii) Se una soluzione u definita su un intervallo $I_u = (a, b)$ è tale che $\exists t_k \nearrow b$ con $u(t_k) \rightarrow x_0$ e $(x_0, b) \in \partial A$ allora u non ammette estensione propria destra.

Dimostrazione Se u avesse una estensione destra $v : (a, b + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, per un qualche $\varepsilon > 0$, si dovrebbe avere che $(t, v(t)) \in A$ per ogni $t \in (a, b + \varepsilon)$ il che è falso essendo $(v(b), b) = (x_0, b) \in \partial A \subseteq A^c$ (essendo A aperto). ■

(iii) Dal Lemma B.18 e dalla definizione di soluzione massimale segue immediatamente la seguente affermazione:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, $f \in \text{Lip}_*(A, \mathbb{R}^n)$ e sia $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$ e sia $(T_-, T_+) := I_{\max}(\bar{t}, \bar{x})$. Se esiste $\lim_{t \rightarrow T_+} u_{\max}(t; \bar{t}, \bar{x}) =: x_+$, si ha che $(x_+, T_+) \notin A$; analogamente per $t \rightarrow T_-$.

È interessante notare che per soluzioni $u(t)$ di equazioni differenziali, l'esistenza del limite $x_0 = \lim_{t \rightarrow b} u(t)$ è garantita dall'esistenza del limite di una qualunque successione $u(t_k)$ con $t_k \rightarrow b$, purché il punto (x_0, b) appartenga al dominio di f : questo è il contenuto del prossimo lemma, la cui dimostrazione è particolarmente istruttiva.

Lemma B.20 Sia $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$, sia $u \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$ e $(a, b) := I_u(\bar{t}, \bar{x})$. Assumiamo che esista $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $(x_0, b) \in A$ e $t_k \in (a, b)$ tali che $t_k \rightarrow b$, $u(t_k) \rightarrow x_0$. Allora, $\lim_{t \rightarrow b} u(t) = x_0$. Analoga affermazione vale per l'estremo sinistro.

Dimostrazione Passando eventualmente ad una sottosuccessione, possiamo assumere che la successione $\{t_k\}$ sia strettamente crescente³⁹.

Supponiamo, per assurdo, che non sia vero che $\lim_{t \rightarrow b} u(t) = x_0$, ossia,

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \hat{t} \in (a, b), \quad \exists \hat{s} \in (\hat{t}, b) \quad \text{t.c.} \quad |u(\hat{s}) - x_0| \geq \varepsilon. \quad (\text{B.64})$$

Poiché $(x_0, b) \in A$, esistono $0 < \rho < \varepsilon$ e $0 < \tau$ tali che

$$E := D \times [b - \tau, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq \rho\} \times [b - \tau, b] \subseteq A. \quad (\text{B.65})$$

Costruiamo, ora, iterativamente, due successioni s_j e k_j come segue.

Sia k_0 tale che

$$|u(t_k) - x_0| < \rho, \quad \forall k \geq k_0, \quad (\text{B.66})$$

(k_0 esiste poiché $u(t_k) \rightarrow x_0$ per ipotesi) e sia $k_1 \geq k_0$ tale che $t_{k_1} > b - \tau$ (k_1 esiste perché $t_k \nearrow b$). Per (B.64),

$$\exists \hat{s} \in (t_{k_1}, b) \mid |u(\hat{s}) - x_0| \geq \varepsilon > \rho. \quad (\text{B.67})$$

La funzione $t \in [t_{k_1}, \hat{s}] \mapsto \delta(t) := |u(t) - x_0| - \rho$ è continua e, per (B.66) (essendo $k_1 \geq k_0$), $\delta(t_{k_1}) < 0$, mentre, per (B.67), $\delta(\hat{s}) > 0$. Dunque dal teorema di esistenza degli zeri – o meglio ‘del primo zero’ – per funzioni continue⁴⁰ esiste $s_1 \in (t_{k_1}, \hat{s})$ tale che $\delta(s_1) = 0$, ossia, $|u(s_1) - x_0| = \rho$. Sia, poi, $k_2 > k_1$, tale che $t_{k_2} > s_1$; si noti che (essendo $k_2 > k_1 \geq k_0$) $|u(t_{k_2}) - x_0| < \rho$ e che, essendo $\{t_k\}$ crescente $t_{k_2} > t_{k_1} > b - \tau$. Come prima, da (B.64) e dalla continuità di u , segue che esiste

³⁹Ad esempio, si può prendere $n_1 := 1$ e ricorsivamente, per $k \geq 2$, $n_k := \min\{k > n_{k-1} \mid t_k > t_{n_{k-1}}\}$: si noti che $t_k < b$ per ogni k e quindi l'insieme appena definito è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} e quindi ha minimo. La sottosuccessione t_{n_k} è strettamente crescente e $t_{n_k} \rightarrow b$.

⁴⁰Vedi, per esempio, Teorema 2.51 in [C2019].

$s_2 > t_{k_2}$ tale che $|u(t) - x_0| < \rho, \forall t_{k_2} \leq t < s_2$, e $|u(s_2) - x_0| = \rho$. Iterando, troviamo due successioni k_j e s_j tali che

$$k_{j+1} > k_j; \quad b - \tau < t_{k_j} < s_j < t_{k_{j+1}}; \quad \begin{cases} |u(t) - x_0| < \rho, \forall t \in [t_{k_j}, s_j), \\ |u(s_j) - x_0| = \rho. \end{cases} \quad (\text{B.68})$$

Si noti che anche da (B.68), segue che $s_j \rightarrow b$. Allora avremmo⁴¹

$$\begin{aligned} \rho &\stackrel{(\text{B.68})}{=} |u(s_j) - x_0| \leq |u(s_j) - u(t_{k_j})| + |u(t_{k_j}) - x_0| \\ &= \left| \int_{t_{k_j}}^{s_j} u'(s) ds \right| + |u(t_{k_j}) - x_0| \\ &= \left| \int_{t_{k_j}}^{s_j} f(u(s), s) ds \right| + |u(t_{k_j}) - x_0| \\ &\leq \max_E |f| \cdot (s_j - t_{k_j}) + |u(t_{k_j}) - x_0| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ottenendo una contraddizione essendo $\rho > 0$. ■

Osservazione B.21 Mettendo assieme i Lemmi B.18 e B.20 otteniamo il seguente

Criterio di estensione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un aperto, $f \in \text{Lip}_*(A, \mathbb{R}^n)$, sia $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$, sia $u \in \mathcal{C}(\bar{t}, \bar{x})$ e $(a, b) := I_u(\bar{t}, \bar{x})$. Assumiamo che esista $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_k \in (a, b)$ tali che $t_k \rightarrow b$, $u(t_k) \rightarrow x_0$ e che $(x_0, b) \in A$. Allora, u ammette una estensione propria destra. Analoga affermazione vale per l'estremo sinistro.

Vediamo due conseguenze notevoli del criterio di estensione.

Il primo risultato descrive il comportamento della soluzione massimale vicino ad un estremo finito dell'intervallo massimale di esistenza:

Proposizione B.22 Sia $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$, sia $(a, b) := I_{\max}(\bar{t}, \bar{x})$ con $b \in \mathbb{R}$. Allora:

- (i) per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $K \times \{b\} \subseteq A$, esiste $\hat{t} \in (\bar{t}, b)$ tale che $u_{\max}(\hat{t}) \notin K$;
- (ii) se $A = \mathbb{R}^n \times J$ con J intervallo e $b \in J$, esiste $J \ni t_k \rightarrow b$, tale che $|u_{\max}(t_k)| \rightarrow +\infty$.

Osservazione B.23 (i) Naturalmente, vale un enunciato del tutto analogo nel caso dell'estremo sinistro (che si può desumere dalla Proposizione B.22 con un opportuno cambio di variabile, oppure rifacendo la dimostrazione con gli ovvi cambiamenti).

(ii) A parole, la Proposizione B.22 afferma che, se un estremo c dell'intervallo massimale di esistenza è finito, le soluzioni del problema di Cauchy escono eventualmente da un qualunque compatto di $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $K \times \{c\} \subseteq A$.

(iii) L'ipotesi che $K \times \{c\} \subseteq A$ è essenziale, come mostra il seguente esempio banale. Consideriamo il problema di Cauchy $u' = f(u, t)$ con $f := 0$ e $A := \mathbb{R}^n \times J$ con $J = (0, 1)$. Ovviamente, per ogni $(\bar{x}, \bar{t}) \in A$, $I_{\max} = J$ e $u_{\max}(t) \equiv \bar{x}$, che quindi non esplose quando t si avvicina agli estremi di I_{\max} . D'altra parte, in questo caso, l'ipotesi che $K \times \{1\} \subseteq A$ non è verificata per alcun compatto K semplicemente perché $1 \notin J$.

Dimostrazione (della Proposizione B.22) (i): Supponiamo, per assurdo, che esista un compatto K tale che $K \times \{b\} \subseteq A$ e tale che $u_{\max}(t) \in K$ per ogni $t \in (\bar{t}, b)$. Sia $\bar{t} < t_k \nearrow b$ e sia $x_k := u(t_k)$. Poiché K è compatto esiste k_j e $\bar{x} \in K$ tali che $x_{k_j} \rightarrow \bar{x}$. Poiché $(\bar{x}, b) \in K \times \{b\} \subseteq A$, dai Lemmi B.20 e B.18 seguirebbe che u_{\max} potrebbe essere estesa, il che è una contraddizione.

(ii): Sia $k \in \mathbb{N}$. Da (i) con $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq k\}$ segue esiste t_k tale che $|u_{\max}(t_k)| > k$. ■

⁴¹Si noti che, grazie a (B.68), $u(t) \in D$ (cfr. (B.65)) per ogni $t_{k_j} \leq t \leq s_j$, ed essendo D convesso (e $E \subseteq A$ dove f è C^1) possiamo applicare nella seconda uguaglianza il teorema del valor medio scalare applicato componente per componente (o direttamente la Proposizione 2.18–(i)); nella terza uguaglianza abbiamo usato l'equazione differenziale $u'(t) = f(u(t), t)$.

Proposizione B.24 (Criterio di globalità)

Sia I un intervallo aperto, $f \in \text{Lip}_*(\mathbb{R}^n \times I, \mathbb{R}^n)$ e tale che, per ogni $\alpha < \beta$ tali che $[\alpha, \beta] \subseteq I$, esistono $L, M > 0$ per cui

$$|f(x, t)| \leq M + L|x|, \quad \forall t \in [\alpha, \beta], \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.69})$$

Allora, per ogni $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^n \times I$, $I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}) = I$. In particolare, se $I = \mathbb{R}$, ogni soluzione di $u' = f(u, t)$ è una soluzione globale.

Dimostrazione Fissiamo $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^n \times I$, sia $(a, b) := I_{\max}(\bar{x}, \bar{t}) \subseteq I$ e supponiamo, per assurdo, che $(a, b) \subsetneq I$: supponiamo per esempio che $b < \sup I$ (il caso $\inf I < a$ si discute in maniera del tutto analoga). Poiché $[\alpha, \beta] := [\bar{t}, b] \subseteq I$, segue che esistono $L, M > 0$ tali che vale (B.69). Quindi, per ogni $t \in [\bar{t}, b]$,

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \bar{x} + \int_{\bar{t}}^t f(u(s), s) ds \right| \leq |\bar{x}| + \int_{\bar{t}}^t |f(u(s), s)| ds \\ &\stackrel{(\text{B.69})}{\leq} |\bar{x}| + \int_{\bar{t}}^t (M + L|u(s)|) ds \\ &\leq |\bar{x}| + M(b - \bar{t}) + L \int_{\bar{t}}^t |u(s)| ds. \end{aligned}$$

Quindi, dal Lemma di Gronwall B.7 (con I sostituito da $[\bar{t}, b]$ e $g(t) = |u(t)|$, $\delta = |\bar{x}| + M(b - \bar{t})$, $\alpha = L$), segue che $|u(t)| \leq R$ con $R = \delta e^{L(b - \bar{t})}$, ossia che $u(t) \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R\}$ per ogni $t \in [\bar{t}, b]$, ma questo contraddice il punto (ii) della Proposizione B.22. ■

B.3.3 Il caso autonomo: flussi e sistemi dinamici

Un caso particolarmente importante è il caso *autonomo*, ossia, il caso in cui il campo $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ non dipenda esplicitamente dal tempo. In tal caso, l'evoluzione, al variare di t di una soluzione massimale $\phi^t(\bar{t}, \bar{x}) = u_{\max}(t; \bar{t}, \bar{x})$, con $\bar{x} \in U$ descrive un *flusso* in U , che soddisfa la *proprietà di gruppo* descritta nel seguente lemma.

Lemma B.25 (Proprietà di gruppo dei flussi) Sia U un aperto di \mathbb{R}^n e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione localmente lipschitziana⁴². Dato $\bar{x} \in U$, poniamo:

$$I_{\max}(\bar{x}) := I_{\max}(0, \bar{x}), \quad \phi^t(\bar{x}) := \phi^t(0, \bar{x}). \quad (\text{B.70})$$

Allora, se $\bar{x} \in U$ e $I_{\max}(\bar{x}) =: (a, b)$, si ha

$$I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}) = \bar{t} + I_{\max}(\bar{x}) := (\bar{t} + a, \bar{t} + b), \quad \forall \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.71})$$

$$\phi^t(\bar{t}, \bar{x}) = \phi^{t - \bar{t}}(\bar{x}), \quad \forall \bar{t} \in \mathbb{R}, t - \bar{t} \in I_{\max}(\bar{x}), \quad (\text{B.72})$$

$$\phi^{t_1 + t_2}(\bar{x}) = \phi^{t_1} \circ \phi^{t_2}(\bar{x}), \quad \forall t_2, t_1 + t_2 \in I_{\max}(\bar{x}). \quad (\text{B.73})$$

Dimostrazione Sia $\bar{t} \in \mathbb{R}$ e poniamo, per ogni $t \in I_{\bar{t}} := (\bar{t} + a, \bar{t} + b)$, $u(t) := \phi^{t - \bar{t}}(\bar{x})$. Allora, u verifica $u' = f(u)$ su $I_{\bar{t}}$ e $u(\bar{t}) = \bar{x}$. Dunque $u \in \mathcal{C}_f(\bar{t}, \bar{x})$. Inoltre, u non ammette estensioni proprie: se $t \rightarrow v(t)$ fosse un'estensione propria di u , allora $t \rightarrow \tilde{v}(t) := v(\bar{t} + t)$ sarebbe un'estensione propria di u , il che è impossibile essendo $u(t) = \phi^t(\bar{x})$ la soluzione massimale del problema di Cauchy: (B.71) e (B.72) seguono.

Usando (B.72) e la (B.63) (con $t = t_1$, $s = 0$ e $\bar{t} = -t_2$), si ha che

$$\begin{aligned} \phi^{t_1 + t_2}(\bar{x}) &\stackrel{(\text{B.72})}{=} \phi^{t_1}(-t_2, \bar{x}) \stackrel{(\text{B.63})}{=} \phi^{t_1}(0, \phi^0(-t_2, \bar{x})) \stackrel{(\text{B.72})}{=} \phi^{t_1}(\phi^0(-t_2, \bar{x})) \stackrel{(\text{B.72})}{=} \phi^{t_1}(\phi^{t_2}(\bar{x})) \\ &= \phi^{t_1} \circ \phi^{t_2}(\bar{x}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

⁴²Ossia, per ogni compatto $D \subseteq U$ esiste $L > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, per ogni $x, y \in D$.

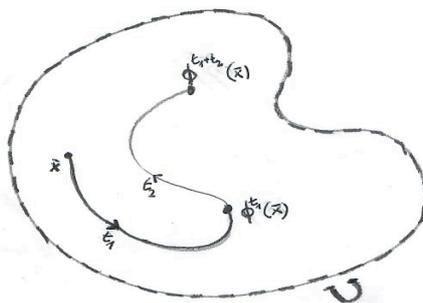


Figura B.5: Proprietà di gruppo del flusso di un'equazione differenziale

Osservazione B.26 (i) Da (B.72) e (B.71) segue che, nel caso autonomo, non è restrittivo prendere $t = 0$ nel problema di Cauchy, poiché il caso generale, segue da questo per traslazione.
 (ii) $\{\phi^t\}$ è un 'gruppo (commutativo) ad un parametro di omeomorfismi': $\phi^0 = \text{id}$, l'inverso di $\phi^t(x)$ è ϕ^{-t} .

Concludiamo questa sezione con alcune definizioni relative alla 'dinamica dei flussi', che introducono il linguaggio della 'teoria dei sistemi dinamici'.

Definizione B.27 Sia U un aperto di \mathbb{R}^n e $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione localmente lipschitziana.

- (i) La coppia $\mathcal{S} = (\phi^t, U)$ è un **sistema dinamico** (su U). L'insieme U si chiama **spazio delle configurazioni** (o 'spazio degli stati') di \mathcal{S} e le funzioni $x(t) = \phi^t(x)$, $x \in U$, sono le **orbite** (o 'traiettorie' o 'moti') di \mathcal{S} .
- (ii) Un sottoinsieme $E \subseteq U$ è un **insieme invariante** per \mathcal{S} se $\phi^t : E \rightarrow E$ (o, più precisamente, se $\forall x \in E, \phi^t(x) \in E$ per ogni $t \in I_{\max}(x)$).
- (iii) Un punto $x_0 \in E$ è un **equilibrio** (o 'punto stazionario') per \mathcal{S} (o, semplicemente, 'per f ') se $\phi^t(x_0) = x_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
- (iv) Un'orbita $x(t) = \phi^t(x)$ è **periodica** con periodo $T > 0$ se, $I_{\max}(x) = \mathbb{R}$, $x(t+T) = x(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e $T_{\min} := \min\{T > 0 \text{ tale che } x(t+T) = x(t) \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}\} > 0$. T_{\min} prende il nome di **periodo minimo** dell'orbita periodica x . Di norma, con 'il periodo di un'orbita periodica' ci si riferisce al periodo minimo.
- (v) Una traiettoria non banale (ossia, non un equilibrio) $x(t) = \phi^t(x)$ si dice **asintotica** a $x_0 \in U$ per $t \rightarrow +\infty$ (risp., $t \rightarrow -\infty$) se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ (risp., $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$); se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$ l'orbita si dice **omoclina**, se $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \neq x_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ ($x_0, x_1 \in U$) l'orbita si dice **eteroclina**. In generale, analoghe definizioni si possono dare sostituendo x_0 con un insieme invariante E e ' $\lim x(t) = x_0$ ' con ' $\lim \text{dist}(x(t), E)$ '.

Osservazione B.28 Raccogliamo qui alcune osservazioni elementari sulle definizioni appena date.

Nello studio di flussi è d'uso comune usare la notazione di Newton (il punto anziché l'apice per denotare la derivata e la x per la funzione incognita).

(i) Un punto x_0 è un equilibrio per f se e solo se $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione Se $x(t) \equiv x_0$ è un'orbita, allora $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0)$. Viceversa, se $f(x_0) = 0$ allora $t \mapsto x(t) = x_0$ è soluzione di $\dot{x} = f(x)$ e dunque $\phi^t(x_0) \equiv x_0$ è un equilibrio. ■

(ii) Un equilibrio $x(t) \equiv x_0$ non è, secondo la definizione in (iv) un'orbita periodica, poiché, in tal caso, ogni $T > 0$ è un periodo e quindi $\min\{T > 0 \mid x(t+T) = x(t)\} = 0$.

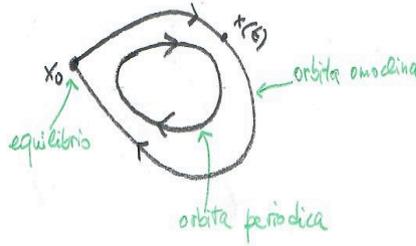


Figura B.6: Orbita omoclina bi-asintotica ad un equilibrio e orbita periodica

(iii) Un'orbita $t \rightarrow x(t)$ è periodica di periodo T se e solo se $x(T) = x(0)$ e $x(t)$ non è identicamente costante.

Dimostrazione Il 'solo se' deriva immediatamente dalla definizione di orbita periodica (prendendo $t = 0$). Assumiamo che $x(t)$ sia un'orbita non identicamente costante tale $x(T) = x(0) =: x_0$. Allora, per ogni t ,

$$x(t+T) = \phi^{t+T}(x_0) \stackrel{\text{(B.73)}}{=} \phi^t(\phi^T(x_0)) = \phi^t(x(T)) = \phi^t(x_0) = x(t). \quad \blacksquare$$

(iv) Sia $x(t) := \phi^t(x_0)$ con $x_0 \in U$ e sia $(T_-, T_+) = I_{\max}(x_0)$. Se esiste $\lim_{t \rightarrow T_+} x(t) = \bar{x} \in U$, allora $T_+ = +\infty$ e \bar{x} è un equilibrio; in altri termini, $x(t)$ è un'orbita asintotica per $t \rightarrow T_+$. Analogamente per T_- .

Dimostrazione Che T_+ sia $+\infty$ segue immediatamente dal Lemma B.18 e dalla definizione di T_+ . Ora, la i -ma componente dell'orbita, $\alpha(t) := x_i(t)$ è tale che $\alpha(t) \rightarrow x_{0i} \in \mathbb{R}$ ed inoltre dall'equazione differenziale segue che $\dot{\alpha} = f_i(x(t)) \rightarrow f_i(x_0) \in \mathbb{R}$ e quindi per il Teorema dell'asintoto⁴³ $f_i(x_0) = 0$. \blacksquare

(v) Ovviamente lo spazio delle configurazioni U è un insieme (banalmente) invariante. Dalla proprietà di gruppo dei flussi segue che la traccia di un'orbita $\gamma := \{x = \phi^t(x_0) \mid t \in I_{\max}(x_0)\}$ è un insieme invariante. Un esempio più interessante di insieme invariante è l'insieme di tutte le orbite periodiche di un sistema dinamico⁴⁴ $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} := \{\text{orbite periodiche di } \mathcal{S}\}$.

(vi) Si noti che, dall'invarianza delle tracce delle orbite (cfr. punto precedente) segue:

le orbite di un flusso non possono 'attraversare' la traccia di un'altra orbita: se γ è la traccia di un'orbita e $\bar{x} \notin \gamma$, allora $\phi^t(\bar{x}) \notin \gamma$, per ogni $t \in I_{\max}(\bar{x})$. In particolare, se la traccia γ di un'orbita contiene un equilibrio x_0 , allora $\gamma = \{x_0\}$.

B.3.4 Analisi qualitativa di equazioni scalari del prim'ordine

Le equazioni differenziali scalari costituiscono senz'altro la classe più semplice di equazioni differenziali: anche nei casi in cui non è possibile trovare una soluzione 'esplicita', l'equazione differenziale dà informazioni puntuali sulla derivata della funzione scalare incognita, il che permette di fare una 'analisi qualitativa' del comportamento della soluzione del problema di

⁴³**Teorema dell'asintoto** Sia $\alpha : t \in (a, +\infty) \rightarrow \alpha(t) \in \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che esistano i limiti $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha = M$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha' = L$ con $M \in \mathbb{R}$ (e $L \in \mathbb{R}^*$). Allora, $L = 0$. Analoga affermazione vale per funzioni $\alpha : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dimostrazione Sia $a < t_n \nearrow +\infty$. Allora, per il teorema del valor medio di Lagrange (cfr. Proposizione 7.26 in [C2019]), esistono $s_n \in (t_n, t_n + 1)$ tali che $0 = M - M = \lim \alpha(t_n + 1) - \alpha(t_n) = \alpha'(s_n) \rightarrow L$, quindi $L = 0$. \blacksquare

⁴⁴Cfr., ad esempio, le seminali ricerche di H. Poincaré in [Les méthodes nouvelles de la mécanique célestes, Tome 1, Ch. III, Gauthier-Villars (Paris), 1892]

Cauchy.

In particolare, le equazioni scalari autonome del prim'ordine, essendo un caso speciale di equazioni a variabili separabili (cfr. § B.1.3), è esplicitamente risolvibile in termine di funzioni integrali, ma ciononostante, l'analisi qualitativa, oltre ad essere più semplice, descrive in modo più immediato il comportamento delle soluzioni.

In questa sezione discuteremo brevemente, le equazioni scalari del prim'ordine, anche con l'intento di illustrare alcune delle nozioni introdotte nelle sezioni precedenti.

(i) L'equazione $\dot{x} = x^2$

Come abbiamo visto (col metodo di separazione delle variabili, cfr. (B.31) con $\bar{t} = 0$), il flusso dell'equazione scalare autonoma con $f : x \in U := \mathbb{R} \rightarrow f(x) := x^2 \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = \bar{x} \tag{B.74}$$

è dato da $t \in I_{\max}(\bar{x}) \rightarrow \phi^t(\bar{x})$ con

$$\phi^t(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{x} = 0, \\ \frac{1}{T_e - t}, & \text{se } \bar{x} \neq 0, \end{cases} \quad I_{\max}(\bar{x}) := \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } \bar{x} = 0, \\ (-\infty, T_e), & \text{se } \bar{x} > 0, \\ (T_e, +\infty), & \text{se } \bar{x} < 0, \end{cases} \tag{B.75}$$

con $T_e := 1/\bar{x}$. Dunque, per ogni $\bar{x} > 0$, $\phi^t(\bar{x})$ è asintotica all'unico equilibrio $x_0 = 0$ per $t \rightarrow -\infty$, mentre per $\bar{x} < 0$ è asintotica a \bar{x} per $t \rightarrow +\infty$. Se $\bar{x} \neq 0$, per $t \rightarrow T_e$, $|\phi^t(\bar{x})| \rightarrow +\infty$, in accordo con la Proposizione B.22–(ii).

(ii) Flussi unidimensionali $\dot{x} = f(x)$

La dinamica dell'equazione differenziale scalare $\dot{x} = f(x)$ è legata agli zeri di f :

Proposizione B.29 *Sia $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) localmente lipschitziana.*

(i) *Siano $x_- < x_+$ due zeri consecutivi di f : $f(x_{\pm}) = 0$ con⁴⁵ $f(x) > 0$ per $x \in I := (x_-, x_+)$. Sia $\bar{x} \in I$. Allora, $I_{\max}(\bar{x}) = \mathbb{R}$, $\phi^t(\bar{x})$ è strettamente crescente e $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi^t(\bar{x}) = x_{\pm}$.*

(ii) *Sia $f(x_0) = 0$ e $f(x) > 0$ per⁴⁶ $x_0 < x < b$, sia $\bar{x} \in (x_0, b)$. Allora, $I_{\max}(\bar{x}) = (-\infty, T_+)$, $\phi^t(\bar{x})$ è strettamente crescente e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(\bar{x}) = x_0$, $\lim_{t \rightarrow T_+} \phi^t(x) = b$; infine,*

$$T_+ < +\infty \iff \int_{\bar{x}}^b \frac{dx}{f(x)} < +\infty. \tag{B.76}$$

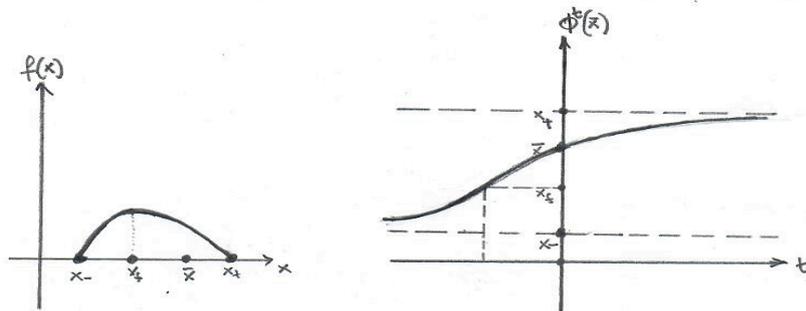


Figura B.7: Campo unidimensionale $f \in C^1$: un'orbita $\phi^t(\bar{x})$ tra due zeri consecutivi

⁴⁵Il caso $f(x) < 0$ si tratta analogamente oppure si deriva da questo sostituendo f con $-f$.

⁴⁶Di nuovo, trattiamo esplicitamente un caso, ma gli altri casi ($f < 0$, o le situazioni simmetriche in $(-\infty, x_0)$ con $f \neq 0$ per $x < 0$) si trattano nella ovvia maniera analoga.

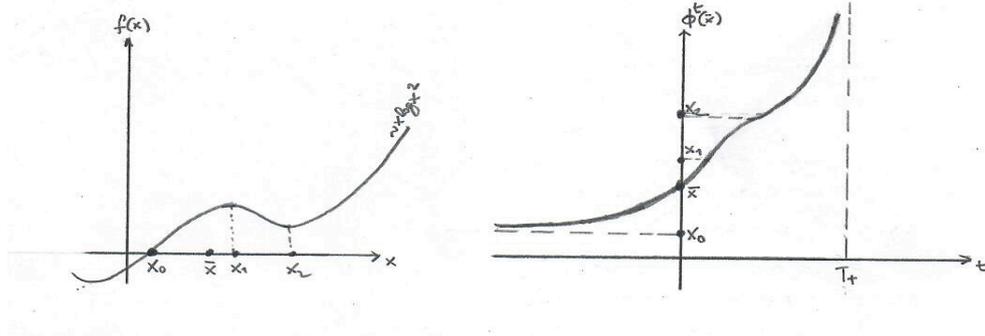


Figura B.8: Campo unidimensionale $f \in C^1$: un'orbita $\phi^t(\bar{x})$ dopo l'ultimo zero

Dimostrazione (i): Sia $(T_-, T_+) := I_{\max}$ e sia $x(t) := \phi^t(\bar{x})$. Poiché $x(t)$ è continua $J := x(I_{\max})$ è un intervallo non banale⁴⁷ che non contiene x_{\pm} (cfr. Osservazione B.28–(vi)). Quindi $J \subseteq I$ (essendo $\bar{x} \in J \cap I$), e $\dot{x}(t) = f(x(t)) > 0$, per ogni $t \in I_{\max}$. Dunque, $x(t)$ è strettamente crescente ed esistono i limiti $\lim_{t \rightarrow T_{\pm}} x(t) =: \hat{x}_{\pm} \in [x_-, x_+]$ e $\lim_{t \rightarrow T_{\pm}} \dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow T_{\pm}} f(x(t))$. Quindi (Osservazione B.28–(iv)) $(T_-, T_+) = \mathbb{R}$ e per il Teorema dell'asintoto (cfr. nota 43), $\lim_{t \rightarrow T_{\pm}} \dot{x} = 0 = f(\hat{x}_{\pm})$ e quindi (non essendoci zeri di f in I) deve essere $\hat{x}_{\pm} = x_{\pm}$. Che $I_{\max} = \mathbb{R}$, nel caso scalare, può anche essere mostrato direttamente come segue. Per separazione di variabili (cfr. § B.1.3) si ha che

$$\int_{\bar{x}}^{x_+} \frac{dx}{f(x)} := \lim_{\tau \rightarrow T_+} \int_{\bar{x}}^{x(\tau)} \frac{dx}{f(x)} = \lim_{\tau \rightarrow T_+} \int_0^{\tau} ds = T_+. \quad (\text{B.77})$$

Essendo f lipschitziana in $[\bar{x}, x_+]$, si ha che, per una opportuna $L > 0$, per ogni $x \in [\bar{x}, x_+]$, $|f(x)| = |f(x) - f(x_+)| \leq L|x - x_+|$ e quindi (si ricordi che $f > 0$ in $[\bar{x}, x_+]$)

$$T_+ = \int_{\bar{x}}^{x_+} \frac{dx}{f(x)} = \int_{\bar{x}}^{x_+} \frac{dx}{|f(x)|} \geq \frac{1}{L} \int_{\bar{x}}^{x_+} \frac{dx}{x_+ - x} = +\infty.$$

(ii): Sia $(T_-, T_+) := I_{\max}$ e sia $x(t) := \phi^t(\bar{x})$. Ragionando come in (i) si ha che $\dot{x} > 0$ su I_{\max} , che $T_- = -\infty$ e che $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$. Dimostriamo, ora, le affermazioni reative a T_+ . Sia $\hat{x} = \lim_{t \rightarrow T_+} x(t)$. Se $T_+ < +\infty$, allora $\hat{x} = b$ per la Proposizione B.22–(ii). Se $T_+ = +\infty$ e, per assurdo, $\hat{x} < b$, allora per il Teorema dell'asintoto (cfr. nota 43) $\dot{x} = f(x) \rightarrow 0$ e quindi $f(\hat{x}) = 0$, il che contraddice l'ipotesi. Dunque, in ogni caso, $\lim_{t \rightarrow T_+} x(t) = b$. Infine, la (B.76) segue per separazione di variabili (essendo T_+ esattamente il valore dell'integrale improprio in (B.76)). ■

Osservazione B.30 (i) Se $f \in C^1$, dall'equazione differenziale, segue che, se $x(t)$ è un'orbita,

$$\ddot{x} = f'(x)\dot{x} = f(x)f'(x), \quad (\text{B.78})$$

relazione che descrive la convessità dell'orbita in termini del campo f . In particolare, se \bar{x} non è un equilibrio, i flessi di $t \rightarrow x(t) = \phi^t(\bar{x})$ corrispondono ai punti critici di f : $\ddot{x}(\tau) = 0$ se e solo se $f'(x(\tau)) = 0$ (cfr. Figura B.8).

(ii) Dalla Proposizione B.29 segue che: gli equilibri corrispondono agli zeri del campo f ; tutte le orbite che iniziano tra due zeri consecutivi sono orbite eterocline; non esistono orbite periodiche o omocline.

(iii) Equazioni non autonome: un esempio

L'analisi qualitativa delle equazioni scalari $\dot{x} = f(x, t)$, con f che dipende esplicitamente dal

⁴⁷Essendo $\dot{x}(0) > 0$.

tempo, è più complessa. Qui ne discuteremo soltanto alcune idee fondamentali tramite un esempio concreto.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\dot{x} = \frac{1}{x - t^2}, \quad x(0) = \bar{x}, \quad \text{con } \bar{x} > 0. \tag{B.79}$$

La funzione $(x, t) \rightarrow 1/(x - t^2)$ ha dominio massimale di esistenza dato da $A_{\max} := \mathbb{R}^2 \setminus S$ dove la ‘curva di singolarità’ S è data dal grafico della parabola $x = t^2$. Su A_{\max} la funzione $1/(x - t^2)$ è C^∞ e dunque la soluzione massimale $x(t) := u_{\max}(t; 0, \bar{x})$ di (B.79) è $C^\infty(I_{\max})$ (Osservazione B.13–(iii)), dove $I_{\max} = I_{\max}(0, \bar{x}) := (T_-, T_+)$ è l’intervallo massimale di esistenza di (B.79). Il dominio A_{\max} è formato da due componenti connesse⁴⁸ $\Omega_\pm := \{(t, x) \mid \pm(x - t^2) > 0\}$ la cui frontiera comune è la singolarità S . Poiché il dato iniziale $(0, \bar{x}) \in \Omega_+$ si dovrà avere che $(t, x(t)) \in \Omega_+$ per ogni $t \in I_{\max}$. Su Ω_+ , $1/(x - t^2) > 0$ e dunque $\dot{x} > 0$, ossia, $t \in I_{\max} \rightarrow x(t)$ è strettamente crescente. Quindi esistono i limiti laterali $\lim_{t \rightarrow T_\pm} x(t) := x_\pm \in \mathbb{R}^*$ e, per l’Osservazione B.19–(iii), $(T_\pm, x_\pm) \notin \Omega_+$.

Chiamiamo $\gamma(t) = (t, x(t))$ (per $t \in I_{\max}$) la traiettoria della soluzione massimale nel piano (t, x) . Poiché $\gamma(t) \in \Omega_+$, si ha $x(t) > t^2$ per ogni $t \in I_{\max}$; in particolare per $t < 0$ si ha $0 < t^2 < x(t)$ e, prendendo il limite per $0 > t \rightarrow T_-$, si ha che $0 < T_-^2 \leq x_- < x(0) = \bar{x}$ (si ricordi che $x(t)$ è strettamente decrescente). Quindi, $-\sqrt{\bar{x}} < T_- < 0$, e poiché $(T_-, x_-) \notin \Omega_+$ si deve avere $(T_-, x_-) \in S$, ossia, $x_- = T_-^2$. Dall’equazione differenziale segue poi che $\lim_{t \rightarrow T_-} \dot{x}(t) = +\infty$.

Studiamo, ora, la convessità di $x(t)$. Dall’equazione differenziale segue

$$\ddot{x} = \frac{2t(x - t^2) - 1}{(x - t^2)^3}, \tag{B.80}$$

e quindi studiando il segno del numeratore (il denominatore è sempre positivo su Ω_+) otteniamo che, se poniamo

$$x_f(t) := t^2 + \frac{1}{2t}, \tag{B.81}$$

allora si ha

$$\ddot{x} > 0 \iff x(t) > x_f(t); \quad \ddot{x} < 0 \iff x(t) < x_f(t); \quad \ddot{x} = 0 \iff x(t) = x_f(t).$$

Sia $Q_+ := \{(x, t) \in \Omega_+ \mid x > x_f(t)\}$. Finché $\gamma(t) \in \Omega_+ \setminus \overline{Q_+}$ la soluzione $x(t)$ è strettamente concava ed è concava se $\gamma(t) \in \Omega_+ \setminus Q_+$. Dunque, per $t \in (T_-, 0]$, la soluzione è strettamente concava ed il grafico qualitativo di $x(t)$ sarà come in Figura B.9.

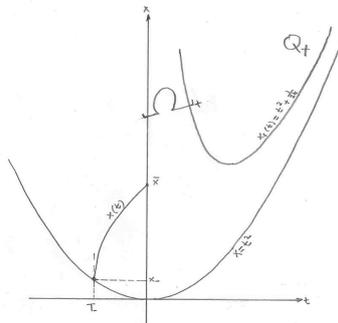


Figura B.9: Una soluzione massimale $x(t)$ di (B.79) per $T \in (T_-, 0)$

⁴⁸In questa discussione, considereremo $\mathbb{R}^2 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2\}$ come piano (t, x) (piuttosto che (x, t)).

Per $t \geq 0$ piccoli, $\gamma(t) \in \Omega_+ \setminus Q_+$ e la soluzione, essendo concava, ha grafico al di sotto di ogni retta tangente al suo grafico⁴⁹; in particolare $\dot{x}(t) \leq \dot{x}(0) = 1/\bar{x}$ per ogni $t > 0$ tale che $\gamma(s) \in \Omega_+ \setminus Q_+$ per ogni $0 \leq s \leq t$. Quindi, se $\gamma(t) \in \Omega_+ \setminus Q_+$ per ogni $t > 0$, $t \in I_{\max}$, si avrebbe $t^2 < x(t) \leq t/\bar{x}$. Questo implica $(T_+, x_+) \in S$ e, quindi, $\lim_{t \rightarrow T_+} \dot{x}(t) = 1/(x(t) - t^2) = +\infty$, il che contraddice $\dot{x}(t) \leq 1/\bar{x}$. Questo significa che esiste un istante $t > 0$ tale che $\gamma(t) \in Q_+$ e, quindi, $t_1 := \inf\{t \mid \gamma(t) \in Q_+\} \in (0, T_+)$. Dalla definizione di t_1 , segue che $\gamma(t_1) \in \partial Q_+$ (ossia, $x(t_1) = x_f(t_1)$) e che esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma(t) \in Q_+$ per ogni $t_1 < t < t_1 + \delta$.

Ora, affermiamo che *una volta entrata in Q_+ , la traiettoria $\gamma(t)$ non ne esce più*.

Per dimostrare questa affermazione faremo uso del Teorema di confronto (Corollario B.10), confrontando la soluzione $x(t)$ proprio con ‘la curva dei flessi’ ∂Q_+ che è il grafico della funzione $x_f(t)$. Osserviamo che dalla definizione di $x_f(t)$ ((B.81)) segue che

$$\dot{x}_f(t) = 2t - \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{x_f(t) - t^2} - \frac{1}{2t^2}.$$

Dunque possiamo applicare il Corollario B.10 con $\bar{t} = t_1$, $f(x, t) = \frac{1}{x-t^2} - \frac{1}{2t^2}$, $g(x, t) = \frac{1}{x-t^2}$, $u(t) = x_f(t)$ e $v(t) = x(t)$, ottenendo che $x_f(t) < x(t)$ per ogni $t \geq t_1$: quindi, $x(t) \in Q_+$ ed è strettamente convessa per $t > t_1$.

Poiché $(T_+, x_+) \notin \Omega_+$ e $Q_+ \subsetneq \Omega_+$ si deve avere $x_+ = +\infty$ (se fosse $x_+ < +\infty$ si avrebbe $(T_+, x_+) \in S$, il che è impossibile essendo S nel complementare di Q_+).

Infine, $T_+ = +\infty$: se fosse $T_+ < +\infty$, dall’equazione differenziale seguirebbe che $\lim_{t \rightarrow T_+} \dot{x} = 0$, ma $x(t)$ è una funzione convessa con un asintoto verticale in $T_+ \in \mathbb{R}$ e quindi anche la sua derivata deve tendere a⁵⁰ $+\infty$.

Infatti, $x(t)$ è asintotica alla parabola $x = t^2$ nel senso che $x(t) = t^2 + \delta(t)$ con $\delta \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Questa affermazione segue dalla convessità di $x(t)$, dall’equazione differenziale e dal fatto che $x(t)$ ha crescita superlineare, essendo $x(t) > t^2$. Infatti, poiché $\ddot{x} > 0$, \dot{x} è strettamente crescente ed esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{x}(t) = \beta \in \mathbb{R}^*$. Se fosse $\beta < +\infty$, si avrebbe, per il Teorema del valor medio di Lagrange, per un qualche $0 < s < t$, $x(t) = \bar{x} + \dot{x}(s)t \leq \beta t$ il che, per t grandi, contraddice $x(t) > t^2$. Quindi, $\beta = +\infty$ e $\dot{x} = 1/(x - t^2) \rightarrow +\infty$ il che equivale a $\delta := x(t) - t^2 \rightarrow 0$. ■

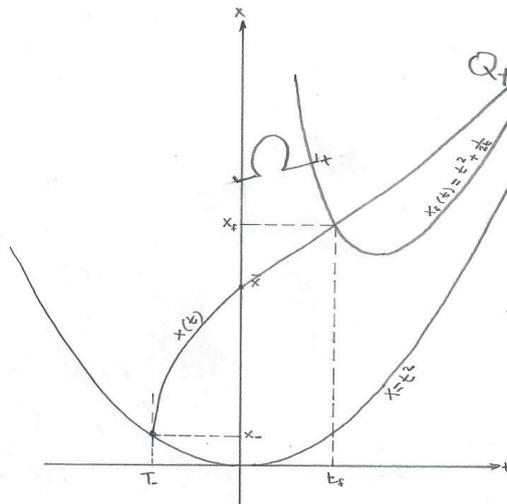


Figura B.10: Una soluzione massimale $x(t)$ di (B.79)

⁴⁹Cfr. [C2019], §7.7.

⁵⁰Poiché x è convessa e regolare \dot{x} è crescente e quindi esiste $\beta = \lim_{t \rightarrow T_+} \dot{x}(t)$ e se fosse $\beta < +\infty$, si avrebbe, per il Teorema del valor medio di Lagrange, che, fissando un qualunque $t_0 < T_+$, per un qualche $t_0 < s < T_+$, $|x(t) - x(t_0)| = |\dot{x}(s)| |t - t_0| \leq \beta(T_+ - t_0)$, ottenendo una contraddizione col fatto che $\lim_{t \rightarrow T_+} x(t) = +\infty$.

B.4 Sistemi lineari

In questa sezione discuteremo sistemi di equazioni differenziali lineari (a coefficienti, in generale, non costanti) su K con $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, ossia, sistemi della forma

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (A(t) \in K^{n \times n}, \quad x \in K^n), \quad (\text{B.82})$$

dove gli elementi di matrice $A_{ij} \in C(I, K)$, I intervallo di \mathbb{R} , e $x = x(t) \in K^n$. Nel caso complesso, $x = u + iv$ con $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $x \in C(I, K)$ significa $u, v \in C(I, \mathbb{R})$ e la derivata ennesima di x è definita come⁵¹ $x^{(n)} := u^{(n)} + iv^{(n)}$.

Nel caso autonomo (ossia, A indipendente dal tempo) abbiamo visto (Proposizione B.1) che esiste una formula risolutiva, mentre, così non è nel caso generale non autonomo.

Un esempio, il cui studio costituisce un importante capitolo a sé della teoria delle equazioni differenziali è l'equazione (scalare, lineare, omogenea, del secondo ordine) di Sturm–Liouville⁵²

$$(p(t)y')' + q(t)y = \lambda y, \quad (\text{B.83})$$

dove le funzioni $p \in C^1(I, (0, +\infty))$, $q \in C(I, \mathbb{R})$ sono date, $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro. L'equazione di Sturm–Liouville (B.83) può essere messa nella forma (B.82) ponendo:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\lambda - q}{p} & -\frac{p'}{p} \end{pmatrix}.$$

B.4.1 Spazio delle soluzioni

Sia $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $t \in I \mapsto A(t) \in C(I, K^{n \times n})$ e denotiamo

$$\mathcal{S}_A := \{x \in C^1(I, K^n) \mid \dot{x} = A(t)x, \quad \forall t \in I\} \quad (\text{B.84})$$

lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare $\dot{x} = A(t)x$. Allora, si ha:

Proposizione B.31 (i) \mathcal{S}_A è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, K^n)$.

(ii) Se $\bar{t} \in I$ e $\bar{x} \in K^n$, le soluzioni (massimali) del problema di Cauchy $\dot{x} = A(t)x$, $x(\bar{t}) = \bar{x}$ hanno intervallo massimale di esistenza $I_{\max}(\bar{t}, \bar{x}) = I$.

(iii) Siano $x_i \in \mathcal{S}_A$ per $1 \leq i \leq m$ e siano $a_i \in K$. Allora,

$$\exists \bar{t} \in I \mid \sum_{i=1}^m a_i x_i(\bar{t}) = 0 \iff \sum_{i=1}^m a_i x_i(t) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (\text{B.85})$$

(iv) \mathcal{S}_A ha dimensione n ed una sua base è data dalle n soluzioni dei problemi di Cauchy $\dot{x} = A(t)x$, $x(\bar{t}) = e^{(i)}$ con $\bar{t} \in I$ arbitrario ($e^{(i)}$ i -esimo versore standard di K^n).

Dimostrazione (i): Se $x, y \in \mathcal{S}_A$ sono soluzioni di (B.82) e $a, b \in K$, chiaramente (per la linearità della derivata e delle matrici identificate con le associate applicazioni lineari⁵³) $ax + by$ è soluzione di (B.82); dunque \mathcal{S}_A è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, K^n)$.

(ii) segue immediatamente dal criterio di globalità (Proposizione B.24) con $L = 0$, $M = \max_{[a,b]} \|A(t)\|$.

(iii) L'implicazione ' \Leftarrow ' è ovvia. Dimostriamo ' \Rightarrow '. Assumiamo, per assurdo, che esista $t_0 \neq \bar{t}$ tale che $\sum_{i=1}^m a_i x_i(t_0) = 0$. Allora, per il punto (i), la funzione $x(t) := \sum_{i=1}^m a_i x_i(t) \in \mathcal{S}_A$ e

dunque verifica il problema di Cauchy $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = 0$ che ha unica soluzione $x(t) \equiv 0$ e quindi in particolare $x(\bar{t}) = 0$, ottenendo una contraddizione.

Per il punto (ii) le n soluzioni dei problemi di Cauchy $\dot{x} = A(t)x$, $x(\bar{t}) = e^{(i)}$ sono definite su I e per il punto (iii) sono linearmente indipendenti in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. ■

⁵¹Useremo indistintamente le notazioni di Newton e di Lagrange; cfr. nota 14.

⁵²Cfr. Capitoli da 7 a 12 nel già citato [E. Coddington, N. Levinson, "The theory of ordinary differential equations", McGraw–Hill (1955)]; vedi anche https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm-Liouville_theory.

⁵³Cfr. Appendice D

Definizione B.32 Una matrice $U(t) := [u^{(1)}, \dots, u^{(n)}]$ non singolare⁵⁴ che soddisfi $U' = AU$ si chiama matrice fondamentale (per il sistema (??)); la funzione $w(t) := \det U$ prende il nome di ‘wronskiano’ (della matrice U o delle soluzioni $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$); una matrice fondamentale per (??) tale che $U(t_0) = I_n$ (dove I_n è la matrice identità) si chiama soluzione fondamentale di (??) (relativa al tempo t_0).

Dunque se U è una matrice fondamentale, la soluzione fondamentale di (??) rispetto al tempo t_0 è data da $V(t) = U(t)U(t_0)^{-1}$ ed in termini della soluzione fondamentale V , la soluzione di (??) con $u(t_0) = u_0$, è data semplicemente da $V(t)u_0$.

Osservazione B.33 Matrici fondamentali, ossia n soluzioni indipendenti di (??), esistono sempre: siano $u^{(j)}(t)$ le soluzioni di

$$u' = A(t)u, \quad u(t_0) = e^{(j)} \quad (\text{B.86})$$

dove $e^{(j)}$ è il versore in \mathbb{R}^n che ha come componenti tutti 0 tranne la j -esima componente che è 1. L'esistenza e l'unicità su tutto I di tali soluzioni è garantito dal Teorema B.5. Allora $V(t) := [u^{(1)}, \dots, u^{(n)}]$ è la soluzione fondamentale di (??).

Osservazione B.34 Dalla Proposizione ?? e dall'osservazione precedente segue che l'insieme di tutte le soluzioni di (??) formano uno spazio vettoriale di dimensione n ed una base di tale spazio vettoriale è data da n soluzioni indipendenti $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ (per esempio dalle soluzioni di (B.86)).

B.4.2 Il caso non autonomo

L'analisi fatta per i sistemi omogenei può essere usata per discutere i **sistemi lineari non omogenei**

$$u' = A(t)u + b(t) \quad (\text{B.87})$$

con $A(\cdot)$ e $b(\cdot)$ funzioni continue su I a valori, rispettivamente, in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ed in \mathbb{R}^n . Sappiamo che, per ogni u_0 esiste una ed una sola soluzione in tutto l'intervallo I di (B.87) con $u(t_0) = u_0$. Per risolvere il problema di Cauchy per (B.87) dobbiamo conoscere la soluzione fondamentale⁵⁵ del problema omogeneo $u' = A(t)u$ ed una qualunque soluzione particolare di (B.87). Supponiamo infatti che V sia la soluzione fondamentale di $u' = Au$ e che $p(t)$ sia una qualunque soluzione di (B.87), allora si verifica immediatamente che

$$u(t) = p(t) + V(t)(u_0 - p(t_0)) \quad (\text{B.88})$$

è la soluzione di (B.87) con $u(t_0) = u_0$.

Nel caso particolare in cui A sia indipendente dal tempo, la soluzione fondamentale (relativa a t_0) è $V(t) = e^{A(t-t_0)}$ e la soluzione di

$$u' = Au + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

è data da

$$u(t) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)} u_0. \quad (\text{B.89})$$

Complementi

Complemento B.1: Altre classi di equazioni differenziali ordinarie risolubili

⁵⁴Cioè con $\det U \neq 0$.

⁵⁵Si ricordi che conoscere la soluzione fondamentale V di (??) è equivalente a conoscere una qualunque matrice fondamentale U essendo queste legate da $V(t) = U(t)U(t_0)^{-1}$.

Equazioni omogenee

Si chiama equazione differenziale omogenea del prim'ordine, un'equazione delle forma

$$x' = f(x, t), \quad (\text{B.90})$$

con f positivamente omogenea di grado 0, ossia, $f(\rho x, \rho t) = f(x, t)$ per ogni $\rho > 0$: in tal caso, per $t > 0$ si ha che

$$f(x, t) = f\left(\frac{1}{t}x, \frac{1}{t}t\right) = g\left(\frac{x}{t}\right), \quad \text{con } g(\xi) := f(\xi, 1).$$

Ponendo, $z(t) := x(t)/t$, si verifica immediatamente che x è soluzione di (B.90) se e solo se z è soluzione di

$$z' = \frac{g(z) - z}{t},$$

che è un'equazione a variabili separabili.

Osservazione B.35 Il motivo legato alla non unicità di questo esempio è che la funzione $x \rightarrow x^{2/3}$ non è sufficientemente regolare in 0. Infatti per avere unicità (almeno locale) in un problema di Cauchy $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, è sufficiente che $x \rightarrow f(x)$ sia lipschitziana in un intorno di x_0 .

Equazioni lineari a coefficienti costanti del second'ordine

Infine, consideriamo equazioni differenziali a coefficienti costanti. Sebbene tutti gli argomenti che discuteremo in questa sezione si generalizzino facilmente ad un ordine arbitrario, per concretezza e per il suo particolare interesse, discutiamo solo il caso di ordine 2.

Consideriamo dunque l'equazione differenziale di ordine 2 a coefficienti costanti data da

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (\text{B.91})$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 . Il relativo problema di Cauchy consiste nel determinare la soluzione di (B.91) avendo assegnati i "dati iniziali" (che in questo caso sono il valore della funzione e della sua derivata in un punto⁵⁶ t_0):

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \end{cases} \quad (t, t_0 \in I, t \in I \mapsto x(t) \in C^2(I)), \quad (\text{B.92})$$

dove I è un intervallo.

Osservazione B.36 (i) Se x è soluzione di (B.91) è automaticamente C^∞ ; per esempio, \ddot{x} è derivabile essendo (per (B.91)) uguale a $-a\dot{x} - bx$ e la sua derivata sarà, quindi, data da $-a\ddot{x} - b\dot{x}$ e, iterando, una qualunque derivata di ordine $k \geq 2$ sarà data da $-aD^{k-1}x - bD^{k-2}x$, ($D := d/dt$).

(ii) L'equazione (B.91) è lineare in x e le sue derivate, dunque se x_1 e x_2 sono due soluzioni di (B.91) lo è anche $\alpha x_1 + \beta x_2$ per ogni α, β .

(iii) L'equazione differenziale (B.91) è *autonoma* ossia non dipende esplicitamente dal tempo, o meglio, il tempo appare solo attraverso la funzione x e le sue derivate. Quindi, se $x(t)$ è una soluzione di (B.91) lo è anche $x(t - t_0)$ per ogni t_0 . In particolare, se $x(t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0, \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \end{cases} \quad (\text{B.93})$$

allora $\hat{x}(t) := x(t - t_0)$ è soluzione del problema di Cauchy (B.92). Dunque basterà considerare il problema di Cauchy (B.93).

Dimostriamo l'unicità del problema di Cauchy (B.93) (da cui segue, per l'osservazione appena fatta, l'unicità del problema di Cauchy (B.92)).

Lemma B.37 Sia I un intervallo contenente lo 0 e siano x_1 e x_2 due soluzioni di (B.91) per $t \in I$ con $x_1(0) = x_2(0)$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$. Allora, $x_1(t) = x_2(t)$ per ogni $t \in I$.

⁵⁶Naturalmente per equazioni di ordine n si assegneranno i valori della funzione e delle derivate fino a ordine $(n - 1)$.

Dimostrazione Per linearità, la tesi è equivalente a dimostrare che l'unica soluzione di (B.93) con dati iniziali nulli $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ è la soluzione identicamente nulla. Supponiamo dunque, per assurdo, che $t \in I \mapsto x$ sia una soluzione non identicamente nulla di (B.91) con $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Allora, esiste $t_1 \in I$ tale che $x(t_1) \neq 0$. Supponiamo $t_1 > 0$ (l'argomento nel caso $t_1 < 0$ è del tutto analogo). Sia $T = \sup D$ dove $D := \{t \geq 0 \mid x(s) = 0 \forall 0 \leq s \leq t\}$; $0 \in D$ e t_1 è un maggiorante, quindi T è un numero reale maggiore o uguale a 0 e minore di t_1 (dunque $D \subseteq I$). La funzione $y = \dot{x}$ verifica l'equazione lineare del prim'ordine

$$\begin{cases} \dot{y} = -ay - bx(t), & \forall t \in I, \\ y(T) = 0, \end{cases}$$

e dunque, per (B.19), si ha, per ogni $\tau \in I$,

$$\dot{x}(\tau) = -b \int_T^\tau e^{a(s-\tau)} x(s) ds.$$

Se $b = 0$, allora x è costante e quindi $x \equiv 0$ (essendo $x(0) = 0$). Se $b \neq 0$, integrando, tale relazione tra T e $t > T$, otteniamo (essendo $x(T) = 0$)

$$x(t) = -b \int_T^t \left(\int_T^\tau e^{a(s-\tau)} x(s) ds \right) d\tau. \quad (\text{B.94})$$

Sia ora $\varepsilon > 0$ (tale che $T + \varepsilon < t_1$) e denotiamo

$$M_\varepsilon := \sup_{T \leq t \leq T+\varepsilon} |x(t)|.$$

Per definizione di T , $M_\varepsilon > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$. Da (B.94) con $t \in [T, T + \varepsilon]$ segue che

$$M_\varepsilon \leq c\varepsilon^2 M_\varepsilon, \quad c = \frac{1}{2} |b| e^{|a|(t_1-T)},$$

che conduce ad una contraddizione se scegliamo $\varepsilon < 1/\sqrt{c}$. ■

Vediamo ora come trovare tutte le soluzioni di (B.91) e la soluzione del problema di Cauchy (B.93). Introduciamo l'“operatore differenziale” $L := D^2 + aD + b$ che agisce sulle funzioni derivabili due volte come

$$Lx = D^2x + aDx + bx = \ddot{x} + a\dot{x} + bx, \quad (\text{B.95})$$

cosicché l'equazione (B.91) si riscrive in forma compatta come $Lx = 0$.

È conveniente considerare in generale soluzioni *complesse* di (B.91), ossia funzioni $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Naturalmente, $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$. Quindi, $z(t)$ è soluzione di (B.91) se e solo se lo sono $x(t)$ e $y(t)$.

Poiché la derivata di $e^{\lambda t}$ è $\lambda e^{\lambda t}$ (come è facile verificare anche nel caso⁵⁷ $\lambda \in \mathbb{C}$), è naturale cercare soluzioni di tale forma. Si trova immediatamente

$$L e^{\lambda t} = P(\lambda) e^{\lambda t}, \quad P(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b \quad (\text{B.96})$$

dove $P(\lambda)$ viene chiamato polinomio caratteristico dell'equazione (B.91). Da (B.96) segue che se λ_0 è una radice del polinomio caratteristico, ossia $P(\lambda_0) = 0$, allora $e^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (B.91). Nel caso in esame (equazioni di secondo grado) vi sono dunque tre casi a seconda del segno del discriminante $\Delta := a^2 - 4b$ di $P(\lambda) = 0$:

- (i) $\Delta > 0$: vi sono due soluzioni reali e distinte di $P(\lambda) = 0$ date da $\lambda_\pm := (-a \pm \sqrt{\Delta})/2 \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\Delta < 0$: vi sono due soluzioni complesse coniugate e distinte di $P(\lambda) = 0$ date da

$$\lambda_\pm := (-a \pm i\sqrt{-\Delta})/2 \in \mathbb{C}, \quad \bar{\lambda}_+ = \lambda_-.$$

- (iii) $\Delta = 0$: vi è una soluzione reale $\lambda_0 := -a/2$ con molteplicità due, ossia, $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$.

⁵⁷Si ricordi che dalla formula di Eulero segue che se $\lambda = \alpha + i\beta$, allora $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$.

Nel caso (i) è immediato verificare che la soluzione del problema di Cauchy (B.93) è data da

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}, \quad A_+ := \frac{\dot{x}_0 - \lambda_- x_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad A_- := \frac{\lambda_+ x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_+ - \lambda_-}. \quad (\text{B.97})$$

Anche nel caso (ii) la soluzione del problema di Cauchy (B.93) è data da (B.97) ed osservando che $A_+ = A_-$ si ha che $x(t) = 2 \operatorname{Re}(A_+ e^{\lambda_+ t})$, ossia, se chiamiamo $\alpha := -a/2$ e $\omega := \sqrt{-\Delta}/2 > 0$,

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} \cos \omega t + (\dot{x}_0 - \alpha x_0) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \omega t, \quad \left(\alpha := -\frac{a}{2}, \omega := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \right). \quad (\text{B.98})$$

Nel caso (iii), (B.96) diventa

$$L e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_0)^2 e^{\lambda t}, \quad (\text{B.99})$$

per cui $e^{\lambda_0 t} =: e^{\alpha t}$ con $\alpha = -a/2$ è una soluzione di (B.91). Osserviamo, però, che la (B.99) è un'identità che vale per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$; se deriviamo tale relazione rispetto a λ , otteniamo⁵⁸

$$L(te^{\lambda t}) = (2(\lambda - \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 t) e^{\lambda t}$$

e calcolando tale relazione per $\lambda = \lambda_0$, otteniamo

$$L(te^{\lambda_0 t}) = 0,$$

che mostra che anche $te^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (B.91). Alternativamente, si può, naturalmente, verificare direttamente che $te^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (B.91). Si verifica, poi, immediatamente che la soluzione di (B.93) è data nel caso (iii) da

$$x(t) = (x_0 + (\dot{x}_0 - \alpha x_0)t) e^{\alpha t}. \quad (\text{B.100})$$

Osservazione B.38 Dall'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy segue immediatamente che tutte le soluzioni di (B.91) sono della forma (i), (ii) o (iii) ed in particolare sono definite per tutti i $t \in \mathbb{R}$.

Infatti se $x(t)$ è una qualunque soluzione di (B.91) per $t \in I$ con I intervallo e $t_0 \in I$, possiamo risolvere il problema di Cauchy (B.92) con dati iniziali $x_0 := x(t_0)$ e $\dot{x}_0 := \dot{x}(t_0)$ e se indichiamo con $x(t; x_0, \dot{x}_0)$ tale soluzione, dal Lemma B.37 segue che $x(t) = x(t; x_0, \dot{x}_0)$ per ogni $t \in I$ e quindi $x(t)$ coincide con una delle soluzioni sopra descritte ed inoltre la soluzione è prolungabile per tutti i $t \in \mathbb{R}$ (essendo le soluzioni sopra descritte $C^\infty(\mathbb{R})$).

Come esempio consideriamo l'oscillatore armonico con attrito la cui equazione evolutiva è data da

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{B.101})$$

dove $-\mu\dot{x}$ esprime la forza dissipativa di attrito e $\mu > 0$ è una costante fisica legata all'intensità dell'attrito. In questo caso il polinomio caratteristico è dato da $m\lambda^2 \pm \mu\lambda + k = 0$ da cui segue

$$\lambda_{\pm} := \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2}.$$

Quindi a seconda della relazione tra μ^2 e $4mk$ si avranno tutti e tre i tipi di soluzione sopra descritti con la caratteristica comune di avere un fattore esponenziale $e^{-\mu t/2}$, la qual cosa implica che tutte le soluzioni avranno limite 0 per $t \rightarrow +\infty$. Questo sistema, al contrario dei modelli conservativi di Newton ($\mu = 0$), ha una dinamica irreversibile.

Per attrito debole (ossia $\mu^2 < 4mk$), si avranno infinite oscillazioni di ampiezza che decade esponenzialmente, mentre per attrito forte ($\mu^2 > 4mk$) non si avrà alcuna oscillazione ("la molla non ha forza sufficiente") ed infine si ha la soluzione speciale nel caso $\mu^2 = 4mk$ con la correzione lineare in t .

⁵⁸Non è difficile verificare che l'ordine delle derivate (rispetto a t e rispetto a λ) può essere scambiato.

Equazioni lineari a coefficienti costanti

Si consideri l'equazione differenziale scalare di ordine n a coefficienti costanti

$$Lx := x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0; \quad (\text{B.102})$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ (o anche⁵⁹ $a_i \in \mathbb{C}$).

(i) Se

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad (\text{B.103})$$

è facile vedere che $P(\lambda) = \det(\lambda - A)$ dove A è la matrice definita come

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.104})$$

$P(\lambda)$ prende il nome di **polinomio caratteristico** dell'equazione (B.102).

(ii) Poichè $\frac{d^j}{dt^j} e^{\lambda t} = \lambda^j e^{\lambda t}$ si ha che, se λ_0 è una radice (in generale complessa) di $P = 0$ (ossia se $P(\lambda_0) = 0$) allora $e^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (B.102). Infatti $L(e^{\lambda_0 t}) = P(\lambda_0)e^{\lambda_0 t} = 0$.

(iii) Si dice che λ_0 è una radice di ordine m di $P = 0$ se esiste un polinomio (a coefficienti complessi) $g(\lambda)$ tale che $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda)$ e $g(\lambda_0) \neq 0$.

Allora, se λ_0 è una radice di ordine m di $P = 0$, $t^j e^{\lambda_0 t}$ è soluzione di (B.102) per ogni $0 \leq j \leq m$. Infatti, se $z(t; \lambda) := e^{\lambda t}$ allora

$$Lz = z P(\lambda) = z (\lambda - \lambda_0)^m g(\lambda),$$

e l'asserto si ottiene derivando rispetto a λ (e calcolando in λ_0) tale relazione.

Da (ii), (iii) e dal Teorema fondamentale dell'algebra⁶⁰ segue che vi sono n soluzioni distinte della forma $t^j e^{\lambda t}$ di (B.102) dove se λ è una radice semplice di $P(\lambda) = 0$ allora $j = 0$, mentre se λ è una radice di ordine $m \leq n$, allora $0 \leq j \leq m$.

Se λ è una radice di ordine m di $P = 0$ e se i coefficienti a_i sono reali allora anche $\bar{\lambda}$ è una radice di ordine m . Dunque⁶¹ $L(t^j e^{\lambda t}) = 0$ ossia anche $t^j e^{\bar{\lambda} t}$ è soluzione di (B.102). Poichè l'equazione (B.102) è lineare si che, se $z := t^j e^{\lambda t}$, anche $(z + \bar{z})/2 := \text{Re}(z)$ e $(z - \bar{z})/(2i) := \text{Im}(z)$ sono soluzioni. In altri termini, se $\lambda := \alpha + i\beta$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) è una radice di ordine m di $P = 0$, sono soluzioni di (B.102) le $2m$ funzioni reali $t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ per $0 \leq j \leq m$.

(iv) Poichè le soluzioni $t^j e^{\lambda t}$ (al variare di j e λ) sono tra loro indipendenti, da § B.4 segue che tutte le soluzioni di (B.102) sono delle combinazioni lineari delle funzioni $t^j e^{\lambda t}$ (ossia, nel caso $a_i \in \mathbb{R}$, sono delle combinazioni lineari di $t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t)$).

Sistemi lineari a coefficienti costanti non omogenei

Si dimostra che se A è una matrice (indipendente dal tempo), $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$, con I intervallo in \mathbb{R} , allora il vettore $u(t)$ definito come

$$u(t) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau \quad (\text{B.105})$$

soddisfa

$$u' = Au + b, \quad u(t_0) = 0. \quad (\text{B.106})$$

Discutere casi speciali $\ddot{x} + \beta \dot{x} + x = f(t)$

Complemento B.2: Sistemi meccanici unidimensionali. Spazio delle fasi

⁵⁹Si ricordi la nota ??.

⁶⁰Se $P(z)$ è un polinomio complesso di ordine n , l'equazione $P(z) = 0$ ha n soluzioni in \mathbb{C} (contando le molteplicità).

⁶¹Si ricordi che $(e^{\alpha})^{\bar{\alpha}} = e^{\bar{\alpha}}$.

Uno degli esempi più importanti di equazione differenziale è fornito dalla fisica ed è l'equazione unidimensionale di Newton:

$$f = ma \quad (\text{B.107})$$

dove $m > 0$ denota la massa di un punto materiale vincolato (senza attrito) a muoversi su una linea (o più in generale su una curva), a denota la sua accelerazione e f la forza esterna che agisce sul punto. Se $x \in J$ denota la coordinata del punto⁶² e se la forza è conservativa (ossia, dipende solo dalla coordinata x), l'equazione di Newton (B.107) si scrive più esplicitamente come

$$m\ddot{x} = f(x), \quad (\text{B.108})$$

dove $t \in I \mapsto x(t) \in J$ è la legge oraria (incognita) del punto di classe $C^2(I)$ e $f \in C(J)$ e, seguendo la notazione di Newton, la derivata rispetto a t è denotata con il punto ($\dot{x} = x' = \frac{d}{dt}x$, $\ddot{x} = x''$, etc.).

Questa è una equazione dinamica “conservativa”, ossia, vi è una quantità che verrà chiamata *energia del sistema* che si conserva nel tempo. Moltiplicando, infatti, i membri della equazione (B.108) per la velocità \dot{x} , otteniamo

$$m\ddot{x} \cdot \dot{x} = f(x)\dot{x}. \quad (\text{B.109})$$

Ora, se

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi \quad (\text{B.110})$$

è una funzione integrale di f (fissato un qualunque $x_0 \in J$), vediamo che (B.109) si può riscrivere come

$$\frac{d}{dt} \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{d}{dt} F(x) \quad (\text{B.111})$$

ovvero, come

$$\dot{E} = 0, \quad E := \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x), \quad V(x) := -F(x), \quad (\text{B.112})$$

dove E denota l'energia totale del sistema che si esprime come somma dell'energia cinetica $T := \frac{m}{2} \dot{x}^2$ e dell'energia potenziale V (che, per definizione, verifica⁶³ $V' = -f$). Dunque essendo la derivata rispetto a t dell'energia identicamente uguale a 0 sull'intervallo I segue che l'energia totale E si conserva lungo i moti del sistema⁶⁴:

$$E(t) \equiv E_0 := \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + V(x_0), \quad \forall t \in I, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \dot{x}_0 := \dot{x}(t_0) \\ x_0 := x(t_0) \end{cases} \quad (\text{B.113})$$

(e $t_0 \in I$ denota l'istante “iniziale”). Tale equazione può essere riscritta come

$$\dot{x} = \sigma \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(x))}, \quad (\sigma = \text{sgn}(\dot{x})). \quad (\text{B.114})$$

Si noti che, per definizione, $E_0 \geq V(x)$ e $E_0 = V(x)$ se e solo se $\dot{x} = 0$.

Vi sono due casi: o $E_0 = V(x_0)$ e, quindi $\dot{x}_0 = 0$, nel qual caso $x(t) \equiv x_0$ è soluzione di (B.108), oppure $E_0 > V(x_0)$, nel qual caso $\dot{x}_0 \neq 0$ e scegliamo (ai fini di una determinazione della soluzione locale) $\sigma := \text{sgn}(\dot{x}_0)$. In questo secondo caso l'equazione (B.114) è una equazione differenziale del prim'ordine a variabili separabili (§ B.1.3) e dunque l'unica soluzione locale di (B.108) con dati iniziali $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ è data da

$$x(t) = \Phi^{-1}(\sigma(t - t_0)) \quad (\text{B.115})$$

dove Φ^{-1} è la funzione inversa di

$$\Phi(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(\xi))}}. \quad (\text{B.116})$$

Osservazione B.39 (i) Dunque, il problema di Cauchy per le equazioni di Newton (o in generale per una equazione differenziale del second'ordine) consiste nel determinare la soluzione dell'equazione differenziale avendo assegnato i dati iniziali $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$. Il metodo sopra discusso, mostra che (almeno localmente) è sempre possibile risolvere il problema di Cauchy per le equazioni di Newton della dinamica nel caso unidimensionale (ossia, $x \in \mathbb{R}$ o su una curva). In questo senso si dice che i sistemi meccanici unidimensionali sono “integrabili”.

⁶²In generale J sarà un intervallo di \mathbb{R} , ma potrebbe, come detto, essere una curva (per esempio il cerchio unitario S^1).

⁶³La derivata rispetto a x continuiamo a denotarla con l'apice.

⁶⁴I “moti” del sistema non son altro che soluzioni dell'equazione (B.108).

(ii) Come nella discussione generale delle equazioni a variabili separabili, nel caso in cui $E_0 > V(x_0)$, l'unicità delle soluzioni è implicita nel metodo (poiché la soluzione viene esplicitamente determinata); andrebbe, invece, discussa a parte nel caso in cui $E_0 = V(x_0)$. Si noti che in questo secondo caso x_0 è un massimo locale di V e quindi $f(x_0) = -V'(x_0) = 0$ (se x_0 è interno a I) ed, essendo $x(t) \equiv x_0$ una soluzione, diremo che x_0 è un *punto d'equilibrio* del sistema o anche un *punto stazionario*.

(iii) Un metodo utile di analizzare le soluzioni è il *ritratto di fase*: da (B.114) segue che il moto ha luogo sulle curve di energia costante nel piano (*spazio delle fasi*) (x, y) dove x è la posizione al tempo t del punto e $y := m\dot{x}$ è il *momento lineare* che è proporzionale alla velocità \dot{x} al tempo t .

Vediamone un semplice esempio concreto.

L'oscillatore armonico

Un punto di massa $m > 0$ vincolato (senza attrito) su una retta e soggetto alla forza di una molla ideale che lo attrae verso l'origine $x = 0$ della retta subisce, secondo Hook⁶⁵, una forza pari a $-kx$ dove $k > 0$ è la *costante di elasticità della molla*, x la posizione del punto materiale e il segno meno è dovuto al fatto che la molla attrae verso l'origine. Dunque, secondo Newton e Hook, la legge del moto di tale punto è regolata dall'*equazione differenziale*

$$m\ddot{x} = -kx \quad (\text{B.117})$$

che possiamo riscrivere come

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (\omega := \sqrt{k/m}). \quad (\text{B.118})$$

Si noti che l'equazione (B.117) è *lineare* e quindi se x_1 e x_2 sono soluzioni di (B.117) lo è anche una qualunque combinazione lineare $\alpha x_1 + \beta x_2$.

Il potenziale del sistema è dato da $V(x) := \frac{1}{2}kx^2$ per cui l'energia totale (che si conserva lungo i moti) sarà data da

$$E(t) := m\frac{\dot{x}^2}{2} + k\frac{x^2}{2}. \quad (\text{B.119})$$

In questo caso (grazie alla linearità) possiamo immediatamente concludere che *la soluzione del problema di Cauchy di (B.117), ossia*⁶⁶,

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (\text{B.120})$$

è *unica*.

Infatti, se x_1 e x_2 verificano entrambe (B.120) si ha che $z := x_1 - x_2$ verifica (B.117) e $z(t_0) = \dot{z}(t_0) = 0$, il che implica che la sua energia

$$m\frac{\dot{z}^2}{2} + k\frac{z^2}{2} = E(0) = 0$$

e dunque, necessariamente, $z(t) \equiv 0$ e $\dot{z}(t) \equiv 0$, ossia $x_1 = x_2$.

Per determinare esplicitamente le soluzioni di (B.120) potremmo naturalmente usare il metodo descritto sopra (che sarebbe comunque un utile esercizio sull'integrazione che invitiamo a fare), ma è assai più semplice osservare che ci sono due ovvie funzioni "indipendenti" che verificano $\ddot{x} = -\omega^2 x$ e sono $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ e poiché l'equazione è lineare ci aspettiamo che *tutte le soluzioni possano scriversi come una combinazione lineare di queste due funzioni*. Infatti, è immediato verificare che

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (\text{B.121})$$

risolve il problema di Cauchy (B.120) e ne è dunque l'unica soluzione. Si noti che tali soluzioni sono definite per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$.

Anche il ritratto di fase è particolarmente semplice in questo caso. Infatti, nello spazio delle fasi $(x, y) := (x, m\dot{x})$, l'equazione di energia costante è

$$k\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2m} = E_0 := k\frac{x_0^2}{2} + \frac{m\dot{x}_0^2}{2}, \quad (\text{B.122})$$

⁶⁵Robert Hooke (Freshwater, 18 luglio 1635 – Londra, 3 marzo 1703).

⁶⁶ \dot{x}_0 è un numero assegnato in \mathbb{R} e il punto qui non ha nessun significato matematico.

e l'origine $(0, 0)$ corrisponde all'unico equilibrio del sistema (“punto fermo nell'origine con molla a riposo”) di energia $E_0 = 0$ e se $E_0 > 0$, allora la (B.122) si può scrivere come

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \text{con} \quad a := \sqrt{2E_0/k}, \quad b := \sqrt{2E_0m}, \quad (\text{B.123})$$

che è l'equazione di una ellissi di semiassi a e b .

Esercizio B.1 Dimostrare che nello spazio delle fasi dell'oscillatore armonico, durante i moti, le ellissi (B.123) vengono percorse in senso antiorario.

Complemento B.3: Dipendenza C^k da dati iniziali e parametri

Valgono i seguenti risultati sulla dipendenza regolare dai dati iniziali delle soluzioni di equazioni differenziali. Usando le notazioni del Teorema B.5 si ha:

- (i) Se f e f_x sono continue su $D \times I$ allora la soluzione $u(t) := \varphi(t; x)$ di (B.39) con $u_0 := x$ è di classe $C^1(\{x, u_0\})$.
- (ii) Se tutte le derivate di f rispetto a x_j di ordine $k \geq 1$ sono continue su $D \times I$ allora la soluzione $u(t) := \varphi(t; x)$ di (B.39) con $u_0 := x$ è di classe $C^k(\{x, u_0\})$.

Complemento B.4: Stabilità (cenni)

Consideriamo il sistema (omogeneo) di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$u' = Au \quad (\text{B.124})$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice indipendente dal tempo.

Definizione B.40 Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di equilibrio per (B.124), se la funzione costante $u(t) := x_0$ è soluzione di (B.124).

Quindi x_0 è un punto di equilibrio per (B.124) se e solo se $Ax_0 = 0$; dunque 0 è sempre un punto d'equilibrio per (B.124) e $x_0 \neq 0$ è un equilibrio se e solo se x_0 è un autovettore di A con autovalore nullo. Il problema che ora ci poniamo è come evolvono dati iniziali vicini ad un punto di equilibrio, ossia come si comportano, per $t \gg 1$, le soluzioni $e^{At}x$ di (B.124), quando il dato iniziale x è vicino ad x_0 .

Definizione B.41 Un punto di equilibrio x_0 per (B.124) si dice stabile (secondo Liapunov) se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $|e^{At}x - x_0| \leq \varepsilon$ per ogni $t > 0$ e per ogni $|x - x_0| \leq \delta$. Un punto di equilibrio stabile x_0 si dice asintoticamente stabile se $\exists \delta > 0$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = x_0$, per ogni $|x - x_0| \leq \delta$. Un punto di equilibrio asintoticamente stabile si chiama anche ‘attrattore’ per (B.124).

Se x_0 è un autovettore con autovalore nullo, allora tutta la retta $\ell_{x_0} := \{sx_0 : s \in \mathbb{R}\}$ è formata da punti di equilibrio essendo $A(sx_0) = sAx_0 = 0$. Quindi se esiste un autovettore x_0 con autovalore nullo, non ci può essere alcun punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Se x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile, necessariamente $x_0 = 0$ e A non ha alcun autovettore con autovalore nullo. Inoltre se 0 è asintoticamente stabile, allora $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Sia infatti $\delta > 0$ quello della definizione di stabilità asintotica, e sia $x \neq 0$ un qualunque vettore di \mathbb{R}^n , allora se poniamo $a = \frac{\delta}{2|x|}$, il vettore ax ha norma uguale a $\frac{\delta}{2}$ ed è quindi all'interno della sfera di raggio δ centrata nell'origine. Allora, $|e^{At}x| = a^{-1}|e^{At}(ax)| \rightarrow 0$, se $t \rightarrow \infty$.

Si noti che, facendo un eventuale cambio di coordinate ($y = x - x_0$), possiamo sempre ridurci al caso in cui il punto di equilibrio sia l'origine.

Se A possiede un autovettore con autovalore avente parte reale strettamente positiva, allora 0 è un punto di equilibrio instabile: infatti è facile vedere che se $Av = \lambda v$, allora $e^{At}v = e^{\lambda t}v$. Dunque se $Av = \lambda v$ e $\text{Re } \lambda > 0$, allora per ogni $\delta > 0$, possiamo trovare, all'interno della sfera di raggio δ attorno all'origine, un vettore w tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At}w| = \infty$: basta prendere $w = av$ con $a = \frac{\delta}{2|v|}$. In tal caso $|e^{At}w| = a|e^{At}v| = a|e^{\lambda t}v| = a|v|e^{t \text{Re } \lambda} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. E questo dimostra che l'origine è instabile.

Concludiamo questa discussione con un criterio sufficiente affinché 0 sia un punto di equilibrio stabile o asintoticamente stabile.

Proposizione B.42 *Supponiamo che A sia diagonalizzabile e che tutti gli autovalori abbiano parte reale minore o uguale a 0. Allora l'origine $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile. Se A è diagonalizzabile e tutti gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa, allora $x = 0$ è asintoticamente stabile.*

Dimostrazione Sappiamo che se $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è una matrice invertibile, allora $T^{-1}e^{AT} = e^{T^{-1}AT}$; inoltre se $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ è la matrice diagonale avente sulla diagonale i numeri complessi d_1, \dots, d_n , allora $\|D\| = \max |d_i|$. Sia, dunque, T la matrice che diagonalizza A : $T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dalle osservazioni appena fatte segue che

$$\begin{aligned} \|e^{At}v\| &= \|TT^{-1}e^{At}TT^{-1}v\| = \|Te^{T^{-1}AT}T^{-1}v\| = \|Te^{\Lambda t}T^{-1}v\| \\ &\leq \|T\| \|e^{\Lambda t}\| \|T^{-1}\| \|v\| = \|T\| \|T^{-1}\| \|v\| \max_{1 \leq i \leq n} e^{(\text{Re } \lambda_i)t}. \end{aligned}$$

Da tale stima segue subito l'asserto. \blacksquare

In effetti, utilizzando la forma canonica di Jordan, si dimostra in maniera del tutto analoga la stessa affermazione senza l'ipotesi di diagonalizzabilità per A .

Complemento B.5: Equazioni delle onde e del calore (alle derivate parziali)

Corda vibrante con estremi fissi (equazione delle onde)

L'evoluzione dello spostamento verticale di una corda elastica (di lunghezza, a riposo, unitaria) con estremi fissi, che oscilla (senza attrito e senza forze esterne) in un piano, soddisfa, in prima approssimazione, la seguente *equazione differenziale alle derivate parziali*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (\text{B.125})$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (\text{B.126})$$

dove $u = u(x, t)$ denota la posizione, all'istante t (in un piano cartesiano $x, y = u$), del punto della corda che a riposo coincide con il punto $(x, y) = (x, 0)$ e c è una costante che dipende dalle caratteristiche fisiche della corda.

Il **problema (classico) di Cauchy per (B.125), (B.126)** consiste nel trovare

$$u \in C^2((0, 1) \times (0, \infty)), \quad \text{con } u, u_t \in C([0, 1] \times [0, \infty)),$$

che soddisfici (B.125), (B.126) e le seguenti *condizioni iniziali*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (\text{B.127})$$

dove u_0 e v_0 sono funzioni assegnate (sufficientemente regolari e tali che $u_0(0) = u_0(1) = v_0(0) = v_0(1) = 0$). Le condizioni 'al contorno' (B.126) si chiamano **condizioni di Dirichlet**.

Definiamo il seguente spazio di funzioni

$$C_{\text{dis}}^k((0, 1)) := \{f \in C^k([0, 1]) : f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0 \forall i \text{ pari e } i \leq k\}. \quad (\text{B.128})$$

Si risolva il problema di Cauchy per (B.125), (B.126) supponendo che i dati iniziali u_0 e v_0 siano di classe $C_{\text{dis}}^\infty((0, 1))$.

Per una funzione $u(x, t)$ di classe C^1 si definisce **l'energia al tempo t** la quantità

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)) dx. \quad (\text{B.129})$$

(i) **(Conservazione dell'energia per la corda elastica)** Si dimostri che se

$$u \in C^2((0, 1) \times (0, \infty)) \cap C([0, 1] \times [0, \infty))$$

è soluzione di (B.126) allora

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \forall t > 0 \quad (\text{B.130})$$

e quindi che $E(t) := E(0)$.

(ii) **(Unicità)** Si usi il punto (i) per dimostrare che la soluzione del problema di Cauchy per (B.125), (B.126) con dati iniziali in C_{dis}^∞ è *unica*.

Equazione del calore

La temperatura di un filo metallico di lunghezza unitaria con gli estremi tenuti a temperatura costante, che (per semplicità) supporremo uguale a 0, soddisfa la seguente equazione alle derivate parziali

$$u_t - k u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (\text{B.131})$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (\text{B.132})$$

dove $u(x, t)$ denota la temperatura al tempo t del punto del filo di coordinata uguale ad x e $k > 0$ è la cosiddetta ‘conduttività’.

Il problema (classico) di Cauchy per (B.131), (B.132) consiste nel trovare u tale che

$$u \in C([0, 1] \times [0, \infty)), \quad \text{con} \quad u_t, u_x, u_{xx} \in C((0, 1) \times (0, \infty)),$$

tale che soddisfi (B.131), (B.132) e la condizione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{B.133})$$

dove u_0 è una funzione assegnata (sufficientemente regolare e tale che $u_0(0) = u_0(1) = 0$). Le condizioni ‘al contorno’ (B.132) si chiamano **condizioni di Dirichlet**.

Si risolva il problema di Cauchy per (B.131), (B.132) supponendo che il dato iniziale u_0 appartenga a $C_{\text{dis}}^1((0, 1))$.

Esercizi

Esercizio B.2 Dimostrare che se $t \in (a, b) \mapsto x(t)$ è una soluzione differenziabile di $x' = x^{2/3}$ e $x(t_0) \neq 0$ per un $t_0 \in (a, b)$, allora esiste un intorno I di t_0 e un polinomio di grado tre, $P(t) = \frac{t^3}{27} + \dots$, tale che $x(t) = P(t)$ per ogni $t \in I$.

Esercizio B.3 Si dimostri l’affermazione fatta nell’Osservazione ??.

Esercizio B.4 Dimostrare che se $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ con D sfera chiusa in \mathbb{R}^n , allora f è uniformemente lipschitziana in D e come costante di Lipschitz può prendersi

$$L = \sup_{x \in D} \|f_x(x)\|. \quad (\text{B.134})$$

Esercizio B.5 (i) Sia $\omega \neq 1$. Si trovi una soluzione dell’equazione differenziale (oscillatore armonico forzato)

$$\ddot{x} + x = \text{sen } \omega t.$$

(ii) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\ddot{x} + x = \text{sen } \omega t, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Esercizio B.6 Si trovi una soluzione dell’equazione differenziale (oscillatore armonico forzato risonante)

$$\ddot{x} + x = \text{sen } t.$$

(ii) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\ddot{x} + x = \text{sen } t, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Esercizio B.7 Perché la (B.105) non fornisce, in generale, una soluzione nel caso $A = A(t)$?

Esercizio B.8 (i) Sia $A := \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ e si calcoli e^A .

(ii) Si verifichi che se $G(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \text{sen } \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} d\tau$, allora $GG' \neq G'G$ e $G'e^G \neq (e^G)' \neq e^G G'$.

Esercizio B.9 Sia $t \in I \rightarrow A(t)$ una funzione continua dall'intervallo I a valori matrici ($n \times n$) e sia $G(t) := \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ con $t_0, t \in I$. Assumendo che G e A commutino, cioè che $AG = GA$, si dimostri che l'unica soluzione $u \in C^1(I)$ di

$$u' = A(t)u + b(t), \quad u(t_0) = u_0 \quad (\text{B.135})$$

dove $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua assegnata è data da

$$u(t) = e^{G(t)} \left(\int_{t_0}^t e^{-G(\tau)} b(\tau) d\tau + u_0 \right). \quad (\text{B.136})$$

Esercizio B.10 Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t), \quad t \in I, \quad (\text{B.137})$$

dove I è un intervallo aperto di \mathbb{R} e a, b e f sono funzioni continue su I .

(i) Si trovi una soluzione di (B.137) assumendo che si conoscano le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0. \quad (\text{B.138})$$

(ii) Si dimostri che tutte le soluzioni di (B.137) hanno la forma

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + p \quad (\text{B.139})$$

dove u_1 e u_2 sono soluzioni indipendenti di (B.138) e $p(t)$ è una qualunque soluzione di (B.137).

(iii) Si scrivano esplicitamente (in termini di f) tutte le soluzioni di (B.137) nel caso in cui i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ siano costanti: $a(t) := a$ e $b(t) := b$.

Esercizio B.11 Sia $x(t)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = f(t), \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad (\text{B.140})$$

dove f è una funzione continua su \mathbb{R} con $\int_{\mathbb{R}} |f| dt < \infty$ e si trovi, se esiste, il $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

Esercizio B.12 Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 + \sinh x = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = \alpha. \quad (\text{B.141})$$

(i) Si trovi $T > 0$ tale che esista un'unica soluzione di (B.141) per $|t| \leq T$.

(ii) Si denoti con $x(t; \alpha)$ la soluzione di (B.141) per $|t| \leq T$ e si calcoli il limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x(t; \alpha)$ per ogni $|t| \leq T$.

(iii) Il limite definito al punto (ii) è uniforme in $t \in [-T, T]$?

Esercizio B.13 Sia $y(x)$ la soluzione di $(1-x)y' = 1+x-y$, $y(0) = 0$. Usando l'equazione differenziale si calcolino tutte le derivate di $y(x)$ in $x=0$; determinare il raggio di convergenza della serie di Taylor di $y(x)$ e si concluda che in un intorno di $x=0$ la soluzione $y(x)$ è analitica.

Esercizio B.14 Sia $T > 0$ e sia $f \in C^1(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, con A aperto di \mathbb{R}^n e f T -periodica: $f(x, t+T) = f(x, t)$ per ogni $(x, t) \in A \times \mathbb{R}$. Dimostrare che se $x(t)$ è soluzione di $\dot{x} = f(x, t)$, $x(0) = x_0$ e se $x(T) = x_0$ allora x è T -periodica ossia $x(t+T) = x(t)$ per ogni t .

Esercizio B.15 Si risolva il problema di Cauchy per (B.125), (B.126) supponendo che i dati iniziali u_0 e v_0 siano:

(i) $u_0 = \sin^3 x$, $v_0 = 0$.

(ii) $u_0 = 0$, $v_0 = \sin^p x$ con $p = 1, 3, 4$.

Esercizio B.16 Discutere il problema di Cauchy per (B.125), (B.126) con $u_0 = \sin^2 x$ e $v_0 = 0$.

Esercizio B.17 Si risolva il problema di Cauchy per (B.131), (B.132) con dato iniziale $u_0 = \sin^p x$ con $p = 1, 2, 3, 4$.