AM3 - Tutorato XII

Teorema della divergenza e teorema di Stokes

Venerdì 28 maggio 2004

Esercizio 1. Sia Σ la superficie in $\mathbb{R}^3$ ottenuta intersecando il piano $x-y+z=1$ con l'interno del cilindro di equazione $x^2+y^2=1$:

1. Si specifichi un orientamento compatibile tra una normale a Σ ed un orientamento su $\partial\Sigma$
2. Rispetto all'orientamento di cui sopra si verifichi che :

$$\int_{\partial\Sigma^+} xz\,dx + yz\,dy + xy\,dz = \int_{\Sigma} rot(xz,yz,xy)\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Esercizio 2. Siano S , D e γ i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$S=\{x^2+y^2+z^2=1, z>0\},\ \gamma=\{x^2+y^2=1, z=0\},$$
$$D=\{x^2+y^2\le 1, z=0\}$$

e sia

$$\vec{F}=\left(\frac{y}{1+z^2}, x^3z^{97}-y, z+x^2\right)$$

1. Utilizzando il teorema della divergenza si calcoli

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

dove $\vec{n}$ è la normale esterna alla superficie chiusa $S\cup D\cup\gamma$.

2. Sia γ^+ la curva γ orientata in senso antiorario nel piano $\{z=0\}$, si calcoli

$$\int_{\gamma^+}\omega^1_{\vec{F}}$$

3. $(*)$ Calcolare

$$\int_S rot\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

Esercizio 3. Calcolare il flusso del campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}=\big(y\cos(x+y)+\log(1+z^2),\ -x\cos(x+y)-x^3-\cos z,\ y\sin^3 x\big)$$

uscente dal solido

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ t.c.\ |y|\le x\le 2-|y|,\ 0\le z\le x+y\}$$