Completezza di autofunzioni per problemi auto-aggiunti

Fernando Argentieri

27 Gennaio 2020

Siano $a < b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, $p_i(t) \in C[a,b] \quad \forall i = 0, ..., n$, $p_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$. Consideriamo il seguente operatore lineare sullo spazio delle funzioni $C^n[a,b]$:

$$x \in C^n[a,b] \longrightarrow L(x) := p_0 x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + ... + p_n x_0.$$

Date delle costanti $M_{i,j}, N_{i,j} \in \mathbb{C}$ per $1 \leq i,j \leq n$ denotiamo:

$$\begin{cases} U_k(x) := \sum_{1 \leq i \leq n} M_{k,i} x^{(i-1)}(a) + N_{k,i} x^{(i-1)}(b), \\ \\ U(x) := (U_1(x), ..., U_n(x)), \\ \end{cases} \tag{1}$$

Chiameremo il problema:

$$\begin{cases} Lx = \lambda x \\ U(x) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

un problema di autovalori.

Definizione 1 Siano $u, v \in L^2(a,b)$,

$$< u, v > := \int_a^b u(t)\overline{v(t)} dt$$

Diremo che L è autoaggiunto se $\forall u, v \in C^n[a,b]$ tale che $Uu = Uv = 0$ si ha: $< Lu, v > = < u, Lv >$. D'ora in avanti supporremo sempre che L sia autoaggiunto.

Definizione 2 Denotiamo con $\Omega := \Big\{ u \in C^n[a,b] : U(u) = 0 \Big\}$.

$\phi \in \Omega$ è un autofunzione se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $L\phi = \lambda\phi$ e $\phi \neq 0$. In tal caso diremo che λ è un autovalore per L.

Teorema 1 *Autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali, inoltre gli autovalori sono reali, al più numerabili e senza punti di accumulazione finiti.*

Dimostrazione Siano u, v autofunzioni con $\lambda \neq \mu$ rispettivi autovalori, allora:

$$\lambda < u, u > = < Lu, u > = < u, Lu > = \overline{\lambda} < u, u > \Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda},$$

dunque tutti gli autovalori sono reali. Inoltre:

$$\lambda < u, v > = < Lu, v > = < u, Lv > = \overline{\mu} < u, v > = \mu < u, v > \Longrightarrow < u, v > = 0,$$

pertanto autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali. Sia $c \in [a,b]$, per ogni $i = 1, ..., n$ denotiamo con $\psi_i = \psi_i(t, l)$ la soluzione di:

$$\begin{cases} L\psi_i = \lambda\psi_i, \\ \\ \psi_i^{(k-1)}(c) = \delta_{i,k} \quad \forall k = 1, ..., n, \end{cases} \tag{3}$$

Ricordiamo che $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ formano una base per lo spazio vettoriale dell'insieme delle soluzioni di $Lx = lx$, inoltre per t fissato $\psi_k(t, l)$ sono funzioni intere rispetto a l. Si osservi che l è un autovalore se e solo se esistono delle costanti non tutte nulle $c_1, ..., c_n$ tale che $U(c_1\psi_1(t, l)+....+c_n\psi_n(t, l)) = 0$, dunque se e solo se $\forall k = 1, ..., n$:

$$\sum_{1\leq j\leq n} c_j U_k \psi_j = 0 \iff \det(U_k\psi_j)_{1\leq j,k,\leq n} = 0.$$

Poiché tale determinante è una funzione intera rispetto ad l non identicamente nulla (gli autovalori possono essere al piú reali), per il principio di identità per funzioni analitiche, gli zeri possono accumularsi al piú all'infinito. In particolare gli autovalori possono essere al più numerabili. ∎

Definizione 3 Sia $\Psi_k(t, l) := (\psi_1^{(k-1)}(t, l), ..., \psi_n^{(k-1)}(t, l))^t$ per $k = 1, ..., n$. Denotiamo con:

$$W(\psi_1, ..., \psi_n)(\tau) := \det(\Psi_1, ..., \Psi_n)(\tau) = \exp\left[\int_c^\tau \frac{-p_1(s)}{p_0(s)} ds\right]$$

il Wronskiano. Definiamo la seguente funzione:

$$\mathrm{K}(\mathrm{t}, \tau, l) := \begin{cases} \dfrac{1}{p_0(\tau)W(\psi_1, ..., \psi_n(\tau)} \det(\Psi_1(\tau, l), ..., \Psi_{n-1}(\tau, l), \Psi_1(t, l)) & se \quad t > \tau, \\ 0 \quad se \quad t \leq \tau, \end{cases} \tag{4}$$

Osservazione 1 Dalla definizione di K si vede immediatamente che valgono le seguenti proprietà:

- $K(t, \tau, l)$ è $C^{n-2}[a, b]$ come funzione di t, ovvero con τ, l fissati, inoltre K è intera ripsetto a l.
- $K(t, \tau, l)$ è C^n nei triangoli $a \leq \tau < t \leq b$ e $a \leq t < \tau \leq b$.
- Per $t \neq \tau$ K soddisfa: $L(K(t, \tau, l)) = lK(t, \tau, l)$.
- $$\frac{\partial^{n-1}K(\tau + 0, \tau, l)}{\partial t^n} - \frac{\partial^{n-1}K(\tau - 0, \tau, l)}{\partial t^n} = \frac{1}{p_0(\tau)}$$

Consideriamo il problema non omogeneo:

$$Lx = lx + f$$

con $f \in C[a,b]$. Si verifica facilmente che:

$$u(t) := \int_a^b K(t,\tau,l)f(\tau)d\tau = \int_a^t K(t,\tau,l)f(\tau)d\tau$$

è soluzione del problema non omogeneo. Cerchiamo di modificare K in una funzione G che soddisfa le stesse proprietà e in modo tale che valga $U(G) = 0$. Dunque fissiamo τ, l e cerchiamo $c_1, ..., c_n$ tale che, posto:

$$G(t,\tau,l) := K(t,\tau,l) + \sum_{1 \le j \le n} c_j \psi_j(t,l)$$

si abbia $U(G) = 0$. Ciò si verifica se e solo se per $k = 1, ..., n$:

$$U_k(K) = - \sum_{1 \le j \le n} c_j U_k(\psi_j)$$

Tale equazione si può risolvere per $\det(U_k(\psi_j))_{1 \le j,k \le n} \neq 0$, ovvero se l non è un autovalore le costanti c_j sono univocamente determinate, inoltre sono analitiche in l (essendo $\det(U_k(\psi_j))_{1 \le j,k \le n}$ una funzione intera rispetto a l), dunque c_j sono funzioni meromorfe con poli al più negli autovalori di L. Dunque G è definita per ogni l che non è un autovalore di L. Inoltre, posto:

$$u(t) := \int_a^b G(t,\tau,l)f(\tau)d\tau,$$

continua a valere $Lu = lu + f$ (se l non è un autovalore). Possiamo adesso enunciare il seguente Teorema:

Teorema 2 *Esiste un'unica funzione $G(t,\tau,l)$, detta funzione di Green, che soddisfa le seguenti proprietà:*

- *G è definita per $a \le t, \tau \le b$ e l non autovalore di L.*
- *G è $C^{n-2}[a,b]$ per τ, l fissati e $C^n[a,b]$ nei triangoli $a \le t < \tau \le b$, $a \le \tau < t \le b$.*
- *Per $t \neq \tau$ G come funzione rispetto a t soddisfa $LG = lG$.*
- *Come funzione di t vale $UG = 0$ per $t \neq \tau$.*
- *Vale l'uguaglianza*

$$\frac{\partial^{n-1} G(\tau+0,\tau,l)}{\partial t^n} - \frac{\partial^{n-1} G(\tau-0,\tau,l)}{\partial t^n} = \frac{1}{p_0(\tau)}. \tag{5}$$

Dimostrazione L'unica cosa che rimane da mostrare è l'unicità. Supponiamo per assuurdo che esistano G_1 e G_2 come nel Teorema 2, dunque: $L(G_1-G_2) = l(G_1-G_2)$ per $t \neq \tau$, inoltre da (5) segue che $G_1-G_2 \in C^{n-1}[a,b]$ come funzione di t. Per $t \neq \tau$ $L(G_1 - G_2) = l(G_1 - G_2)$, dunque per continuità otteniamo $G_1 - G_2 \in C^n[a,b]$. Inoltre $U(G_1 - G_2) = U(G_1) - U(G_2) = 0$, dunque otteniamo una contraddizione se l non è un autovalore. ∎

Osservazione 2 A meno di sostituire L con $L' := L - l$ con l diverso da ogni autovalore, non è restrittivo supporre che 0 non sia un autovalore per L. Dunque d'ora in avanti supporremo sempre che 0 non sia un autovalore di L.

Da ora indicheremo con $G(t,\tau)$ la funzione $G(t,\tau,0)$. Si osservi che G è ben definita, avendo assunto che 0 non sia un autovalore.

Definizione 4 Data $f \in C[a,b]$ definiamo:

$$\mathfrak{G}f := \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

Osservazione 3 Data $f \in C[a,b]$, $\mathfrak{G}f \in \Omega$, inoltre $L\mathfrak{G}f = f$. Viceversa, data $f \in \Omega$,

$$\mathfrak{G}Lf = f,$$

infatti

$$L(\mathfrak{G}Lf - f) = 0, \quad \mathfrak{G}Lf - f \in \Omega$$

ma 0 non è un autovalore, dunque $\mathfrak{G}Lf = f$.

Pertanto $\mathfrak{G}$ è l'operatore integrale inverso di L. Si osservi che anche $\mathfrak{G}$ è autoaggiunto, infatti date $u, v \in C[a,b]$:

$$< \mathfrak{G}u, v >=< \mathfrak{G}u, L\mathfrak{G}v >=< L\mathfrak{G}u, \mathfrak{G}v >=< u, \mathfrak{G}v > .$$

Si osservi inoltre che gli autovalori di $\mathfrak{G}$ sono gli inversi degli autovalori di L, infatti data $u \neq 0$ tale che $\mathfrak{G}u = \mu u$, allora $L\mathfrak{G}u = \mu Lu = u$, da cui $Lu = \frac{1}{\mu}u$ ($u \neq 0 \implies \mu \neq 0$ essendo $u = \mu Lu$). Viceversa, data $f \neq 0 \in \Omega$ tale che $Lf = \lambda f$, si ha che: $\lambda\mathfrak{G}f = \mathfrak{G}\lambda f = \mathfrak{G}Lf = f$, dunque $\mathfrak{G}f = \frac{1}{\lambda}f$ (si ricordi che per ipotesi 0 non è un autovalore, pertanto $\lambda \neq 0$). $\mathfrak{G}$ è un operatore compatto, infatti posto

$$M := \max_{a \leq t,\tau \leq b} |G(t,\tau)| ,$$

si ha che:

$$||\mathfrak{G}|| := \sup_{||u||=1} ||\mathfrak{G}u|| \leq M(b-a)^{1/2}$$

con $||u|| := (< u, u >)^{1/2}$. Mostriamo adesso l'esistenza di autovalori per $\mathfrak{G}$, dunque per L.

Lemma 1 *L'insieme delle funzioni* $\{\mathfrak{G}u\}$ *con* $u \in C[a,b]$, $||u|| \leq 1$ *è un insieme di funzioni equicontinue e equilimitate.*

Dimostrazione Data u come nel lemma, allora:

$$|\mathfrak{G}u(t)| \leq \int_a^b |G(t,\tau)||u(\tau)|d\tau \leq M(b-a)^{1/2}||u|| \leq M(b-a)^{1/2}.$$

Dunque tali funzioni sono equilimitate. Essendo $\mathfrak{G}(t,\tau)$ uniformemente continua su $a \leq t, \tau \leq b$, $\forall \epsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per $a \leq t_1, t_2 \leq b$, $|t_1 - t_2| < \delta$, $|G(t_1,\tau) - G(t_2,\tau)| < \epsilon$ per ogni $a \leq \tau \leq b$. Dunque:

$$|\mathfrak{G}u(t_1) - \mathfrak{G}u(t_2)| \leq \int_a^b |G(t_1,\tau) - G(t_2,\tau)|u(\tau)|d\tau \leq \epsilon(b-a)^{1/2},$$

il che mostra l'equicontinuità. ∎

Lemma 2

$$||\mathfrak{G}|| = \sup_{||u||=1} |<\mathfrak{G}u, u>|$$

Dimostrazione Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, posto

$$\mu := \sup_{||u||=1} |<\mathfrak{G}u, u>|$$

si ha che:

$$|<\mathfrak{G}u, u>| \leq ||\mathfrak{G}u||||u|| = ||\mathfrak{G}u|| \leq ||\mathfrak{G}||||u|| = ||\mathfrak{G}||,$$

pertanto $\mu \leq ||\mathfrak{G}||$. Viceversa:

$$<\mathfrak{G}u+v, u+v> = <\mathfrak{G}u, u> + <\mathfrak{G}v, v> + 2\,\mathrm{Re}\, <\mathfrak{G}u, v> \leq \mu||u+v||^2,$$

$$<\mathfrak{G}u-v, u-v> = <\mathfrak{G}u, u> + <\mathfrak{G}v, v> - 2\,\mathrm{Re}\, <\mathfrak{G}u, v> \geq -\mu||u-v||^2.$$

Sottraendo le due equazioni otteniamo:

$$4\,\mathrm{Re}\, <\mathfrak{G}u, v> \leq 2\mu(||u||^2 + ||v||^2).$$

Pertanto la tesi segue prendendo

$$v = \frac{\mathfrak{G}u}{||\mathfrak{G}u||}. \quad ∎$$

Teorema 3 *Almeno uno tra* $||\mathfrak{G}||$ *e* $-||\mathfrak{G}||$ *è un autovalore per* $\mathfrak{G}$*, inoltre* $\mathfrak{G}$ *possiede infiniti autovalori.*

Dimostrazione Supponiamo che $\mu_0 := ||\mathfrak{G}|| = \sup_{||u||=1} < \mathfrak{G}u, u >$ Per il Teorema di Ascoli-Arzelà e dal Lemma 2 segue che esiste una successione di funzioni continue $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$||u_n|| = 1, \quad \lim < \mathfrak{G}u_n, u_n >= ||\mathfrak{G}||$$

e $\mathfrak{G}u_n$ uniformemente convergente a una funzione $\phi \in C[a, b]$. Dall'uniforme convergenza di $\mathfrak{G}u_n$ a ϕ segue che:

$$||\mathfrak{G}u_n - \phi|| \longrightarrow 0,$$

dunque $||\mathfrak{G}u_n|| \longrightarrow ||\phi||$.

$$0 \leq ||\mathfrak{G}u_m - \mu_0 u_m||^2 = ||\mathfrak{G}u_m||^2 + \mu_0^2 - 2\mu_0 < \mathfrak{G}u_m, u_m > \longrightarrow ||\phi||^2 - \mu_0^2 \leq 0,$$

da cui otteniamo:

$$\begin{cases} ||\phi|| = \mu_0 \\ \\ ||\mathfrak{G}u_m - \mu_0 u_m|| \longrightarrow 0 \end{cases} \tag{6}$$

Dunque:

$$0 \leq ||\mathfrak{G}\phi - \mu_0\phi|| \leq ||\mathfrak{G}\phi - \mathfrak{G}(\mathfrak{G}u_n)|| + ||\mathfrak{G}(\mathfrak{G}u_n) - \mu_0\mathfrak{G}u_n|| + ||\mu_0\mathfrak{G}u_n - \mu_0\phi|| \longrightarrow 0$$

poich'e $||\mathfrak{G}v|| \leq ||\mathfrak{G}||||v||$. Dunque, posto $\chi_0 := \frac{\phi}{||\phi||}$, si ha che $\mathfrak{G}\chi_0 = \mu_0\chi_0$, $||\chi_0|| = 1$. Si procede in modo analogo nel caso in cui

$$||\mathfrak{G}|| = -\inf_{||u||=1} < \mathfrak{G}u, u > .$$

Dunque abbiamo mostrato l'esistenza di un autovalore per $\mathfrak{G}$. Poniamo

$$\mathfrak{G}_1(t, \tau) := \mathfrak{G}(t, \tau) - \mu_0\chi_0(t)\chi_0(\tau),$$

Si osservi che l'insieme $\{\mathfrak{G}_1 u : ||u|| = 1\}$ è ancora un insieme di funzioni equicontinue ed equilimitate, dunque riapplicando lo stesso procedimento otteniamo che esiste χ_1 tale che $||\chi_1|| = 1$ e $\mathfrak{G}_1\chi_1 = \mu_1\chi_1$, con $|\mu_1| = ||\mathfrak{G}_1||$. Poiché:

$$< \mathfrak{G}_1 u, \chi_0 >= 0 \quad \forall u \in C[a, b],$$

si ha che χ_1 è ortogonale a χ_0, dunque $\mathfrak{G}\chi_1 = \mathfrak{G}_1\chi_1 = \mu_1\chi_1$. Pertanto μ_1 è un autovalore per $\mathfrak{G}$ e vale $|\mu_1| \leq |\mu_0|$. Dunque ponendo

$$\mathfrak{G}_2 := \mathfrak{G}_0 - \mu_0\chi_0(t)\chi_0(\tau) - \mu_1\chi_1(t)\chi_1(\tau)$$

e cosí via possiamo iterare il procedimento fintanto che $||\mathfrak{G}_n|| \neq 0$. Se per assurdo esistesse n tale che $||\mathfrak{G}_n|| = 0$, dato $\varphi \in C[a, b]$ si avrebbe:

$$L\mathfrak{G}_n f = f - \sum_{k\leq n} \mu_j < f, \chi_j > \chi_j = 0,$$

ma $\chi_j \in C^n[a, b]$, dunque $f \in C^n[a, b]$, che è assurdo per $f = |t - \frac{a+b}{2}|$. Dunque abbiamo mostrato l'esistenza di infiniti autovalori per $\mathfrak{G}$. ∎

Mostriamo infine il Teorema di completezza:

Teorema 4 *Sia* $f \in L^2(a,b)$*, allora:*

$$f = \sum_k < f, \chi_k > \chi_k$$

nel senso che:

$$\lim ||f - \sum_k < f, \chi_k > \chi_k > || = 0.$$

Inoltre, se $f \in \Omega$*, allora:*

$$f(t) = \sum_k < f, \chi_k > \chi_k(t) \quad \forall t \in [a,b].$$

Mostriamo prima la disuguaglianza di Bessel:

Lemma 3 (Disuguaglianza di Bessel) Sia $f \in L^2(a,b)$, allora:

$$\sum_k (| < f, \chi_k > |)^2 \leq ||f||^2.$$

Dimostrazione

$$0 \leq ||f - \sum_{k \leq n} < f, \chi_k > \chi_k|| = ||f||^2 - \sum_{k \leq n} (| < f, \chi_k > |)^2,$$

dunque:

$$\lim \sum_{k \leq n} (| < f, \chi_k > |)^2 = \sum_k (| < f, \chi_k > |)^2 \leq ||f||^2. \quad \blacksquare$$

Corollario

$$\sum_k \mu_k^2 < \infty$$

Dimostrazione Si osservi che:

$$\int_a^b \overline{G(t,\tau)\chi_k(\tau)} d\tau = \mu_k \overline{\chi_k(t)},$$

dunque dalla disuguaglianza di Bessel otteniamo:

$$\sum_k \mu_k^2 |\chi_k(t)|^2 \leq \int_a^b |G(t,\tau)|^2 d\tau,$$

dunque integrando da a a b rispetto a t ricaviamo:

$$\sum_k \mu_k^2 \leq M^2 (b-a)^2 < \infty \quad \blacksquare$$

Lemma 4 La funzione di Green $G(t, \tau, l)$ ha al più poli semplici negli autovalori di L.

Dimostrazione Sia $f \in C[a, b]$, definiamo:

$$g(t, l) := \int_a^b G(t, \tau, l) f(\tau) d\tau$$

e supponiamo per assurdo che u abbia un polo di ordine $m > 1$ in λ. Sia

$$g(t, l) = \frac{g_m(t)}{(l - \lambda)^m} + \frac{g_{m-1}(t)}{(l - \lambda)^{m-1}} + ...,$$

Poiché

$$\begin{cases} (L - \lambda)g = (l - \lambda)g + f \\ \\ U(g) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

otteniamo che:

$$\begin{cases} U g_h = 0 \quad \forall h \\ \\ (L - \lambda)g_m = 0 \\ \\ (L - \lambda)g_h = g_{h+1} \quad per \quad 1 \leq h < m \end{cases} \tag{8}$$

Pertanto:

$$< g_m, g_m >=< g_m, (L - \lambda)g_{m-1} >=< (L - \lambda)g_m, g_{m-1} >= 0,$$

dunque $g_m = 0$, contraddizione. Per quanto appena detto si ha che per ogni $f \in C[a, b]$, la funzione

$$\int_a^b G(t, \tau, l) f(\tau) d\tau$$

ha al più poli semplici. Se per assurdo esistesse λ tale che G ha un polo di ordine $m > 1$, allora si avrebbe:

$$G(t, \tau, l) = \frac{G_m(t, \tau)}{(l - \lambda)^m} + \frac{G_{m-1}(t, \tau)}{(l - \lambda)^{m-1}} + ...$$

Siano $r, s \in [a, b]$ tale che $G_m(r, s) \neq 0$, per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno V di s tale che per ogni x in tale intorno $G(r, x) \neq 0$. Dal lemma di Urysohn esiste $f \in C[a, b]$ tale che $f(s) = 1$, per ogni $x \in V$ $0 \leq f(x) \leq 1$ e $f = 0$ fuori da V. Ma, con tale f si ha che:

$$\int_a^b G(t, \tau, l) f(\tau) d\tau$$

ha un polo di ordine $m > 1$ in λ, assurdo. Dunque la funzione di Green ha poli al più di ordine 1.

Lemma 5 Sia $f \in C[a,b]$, se $< f, \chi_k >= 0$ per ogni k, allora $f = 0$.

Dimostrazione Sia:

$$g(t,l) := \int_a^b G(t,\tau,l) f(\tau) d\tau,$$

mostriamo che se f è ortogonale a tutte le autofunzioni, allora $f = 0$. Infatti se per assurdo:

$$g(t,l) = \frac{g_1(t)}{(l-\lambda)} + \sum_{k \geq 0} h_k(t)(l-\lambda)^k$$

con $g_1 \neq 0$, allora poiché:

$$(L-\lambda)g = (l-\lambda)g + f, \quad (L-\lambda)h_0 = g_1 + f, \quad Ug = 0, Uh_k = 0$$

si ha che $(L-\lambda)g_1 = 0, \quad Ug_1 = 0$. Pertanto g_1 è un autofunzione per λ, dunque $< f, g_1 >$. Dunque:

$$< g_1, g_1 >=< g_1, (L-\lambda)h_0 - f >=< g_1, (L-\lambda)h_0 >=< (L-\lambda)g_1, h_0 >= 0,$$

il che contraddice $g_1 \neq 0$. Pertanto $g(t,l) = \sum_{h \geq 0} a_h(t) l^h$ è una funzione intera. Inoltre, poiché $Ug = 0$, $(L-\lambda)g = (l-\lambda)g + f$, si ha che $Ua_h = 0$ per ogni h e $La_{h+1} = a_h$, $La_0 = f$. Pertanto, posto $a_{-1} := f$, si ha che:

$$< a_{j-1}, a_i >=< La_j, a_i >=< a_j, La_i >=< a_j, a_{i-1} > .$$

Sia $\Gamma_{i+j} :=< a_i, a_j >$, per quanto appena osservato la definizione è ben posta (ovvero $< a_i, a_j >=< a_h, a_k >$ se $i + j = h + k$). Dunque $< g, a_0 >= \sum_{h \geq 0} \Gamma_h l^h$ è una funzione intera, dunque anche

$$z(l) := \sum_{h \geq 0} \Gamma_{2h} l^{2h}$$

è una funzione intera. Ma $\Gamma_{2h}^2 =< a_{h-1}, a_{h+1} >^2 \leq \Gamma_{2h+1}\Gamma_{2h-1}$. Pertanto, se $\Gamma_2 \neq 0$, si ha che $\Gamma_{2h} \neq 0$ per ogni $h \geq 1$. In tal caso si ha che:

$$\frac{\Gamma_{2(h+1)}}{\Gamma_{2h}} > \frac{\Gamma_{2h}}{\Gamma_{2(h-1)}},$$

il che contraddice il fatto che z sia intera. Assurdo. Dunque $\Gamma_2 = 0$, ovvero $a_1 = 0$, e quindi $f = La_0 = L(La_1)) = 0$. ∎

Dimostrazione (Teorema 4) Sia $f \in \Omega$, $u := \mathfrak{G} f$. Mostriamo che:

$$\sum_k \mu_k < u, \chi_k > \chi_k$$

converge uniformemente su $[a,b]$. Infatti, per ogni $1 \leq p < q$,

$$\left| \sum_{p \leq k \leq q} \mu_k < u, \chi_k > \chi_k \right| = \left| \mathfrak{G} \sum_{p \leq k \leq q} < u, \chi_k > \chi_k \right| \leq ||\mathfrak{G}|||| \sum_{p \leq k \leq q} < u, \chi_k > \chi_k||$$

$$\leq ||\mathfrak{G}|(|\sum_{p\leq k}|<u,\chi_k>|)^2$$

che tende a zero per $p \longrightarrow \infty$ per la disuguaglianza di Bessel. Pertanto

$$\sum_k \mu_k < u, \chi_k > \chi_k$$

è uniformemente convergente, dunque continua. Dal Lemma 5, essendo:

$$f - \sum_k \mu_k < u, \chi_k > \chi_k$$

ortogonale a ogni χ_k e continua su $[a,b]$, abbiamo:

$$f = \sum_k \mu_k < u, \chi_k > \chi_k = \sum_k < u, \mathfrak{G}\chi_k > \chi_k = \sum_k < \mathfrak{G}u, \chi_k > \chi_k = \sum_k < f, \chi_k > \chi_k.$$

Dunque la prima parte del Teorema 4 è dimostrata. La seconda segue dalla densità di Ω in $L^2(a,b)$. Infatti sia $f \in L^2(a,b)$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $g \in \Omega$ tale che $||f-g|| < \epsilon$. Dunque:

$$||f - \sum_{k\leq m} < f, \chi_k > \chi_k|| \leq ||f-g|| + ||g - \sum_{k\leq m} < g, \chi_k > \chi_k|| + ||\sum_{k\leq m} < f-g, \chi_k > \chi_k||.$$

Per la disuguaglianza di Bessel, l'ultimo pezzo è minore o uguale di $||f-g||$. Inoltre per quanto già mostrato, essendo $g \in \Omega$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per $m > N$:

$$||g - \sum_{k\leq m} < g, \chi_k > \chi_k|| < \epsilon.$$

Dunque, per $m > N$:

$$||f - \sum_{k\leq m} < f, \chi_k > \chi_k|| \leq 3\epsilon. \quad \blacksquare$$

Corollario (Uguaglianza di Parseval)
Data $f \in L^2(a,b)$, si ha che:

$$||f|| = \sum_k |< f, \chi_k >|^2.$$

Dimostrazione Segue direttamente da:

$$||f - \sum_{k\leq m} < f, \chi_k > \chi_k|| = ||f|| - \sum_k |< f, \chi_k >|^2. \quad \blacksquare$$