(11/10/19)

Esercizio 1 Dimostrare il seguente

Teorema di monotonia Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f \in C^1(\mathbb{R} \times I, \mathbb{R})$. Sia u la soluzione del problema di Cauchy

$$u' = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0 .$$

Assumiamo che

$$f(u_0, t_0) = 0, \quad f_t(u(t), t) \geq 0, \quad \forall t \in I . \quad (1)$$

Allora, per $t \in I$ si ha

$$u'(t) \leq 0, \quad \forall t \leq t_0, \quad u'(t) \geq 0, \quad \forall t \geq t_0 . \quad (2)$$

Inoltre, se la disuguaglianza in (1) è stretta, allora le disuguaglianze in (2) strette.

Esercizio 2 Sia $u : (t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e tale che esistono i limiti (eventualmente infiniti)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lambda, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \mu .$$

Dimostrare che se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\mu = 0$.