(14/10/19)

Esercizi su equazioni scalari:

**Esercizio 1** Si consideri il problema di Cauchy

$$\dot{x} = |x| - \arctan e^t \ , \qquad x(0) = y \ .$$

(i) Determinare l'andamento della soluzione al variare di $y \in \mathbb{R}$. e dimostrare in particolare che $\exists y_0$ tale che

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \pi/2 \ ,$$

$(x(t) := x(t; y_0))$.

**Esercizio 2** Si risolvino le seguenti equazioni differenziali

$$\dot{x} = \frac{t^2 + tx + x^2}{t^2} \ ; \tag{1}$$

$$\dot{x} = x + tx^2 \ . \tag{2}$$

Altri esercizi:

**Esercizio 3** Sia $|\cdot|$ la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ e sia $\|\cdot\|$ la norma operatoriale di $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ (ossia $\|A\| = \sup |Ax|/|x|$, $x \neq 0$).

(i) Dimostrare che per ogni matrice $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $\|A\| \geq \max |\lambda_i|$ dove il massimo è preso sugli $n$ autovalori di $A$.

(ii) Dimostrare che se $A =$ diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_i \in \mathbb{C}$, allora $\|A\| = \max |\lambda_i|$.

(iii) Dimostare che se $U$ è una matrice reale ortogonale (cioè $U^T :=$ trasposta di $U = U^{-1}$), allora $\|U\| = 1$.

(iv) Dimostrare che se $A$ è (reale e) simmetrica allora $\|A\| = \max |\lambda_i|$ ($:=$ massimo modulo degli autovalori di $A$).

(v) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ dove $\varepsilon > 0$. Dimostrare che gli autovalori di $A$ sono 0 e $\varepsilon$ (e quindi $A$ è diagonalizzabile) e che $\|A\| = \sqrt{1 + \varepsilon^2} > 1$. Questo dimostra che anche se $A$ è diagonalizzabile (ma non simmetrica) può accadere che $\|A\| > \max |\lambda_i|$.

**Esercizio 4** Calcolare l'esponenziale delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \ ; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \qquad J_k \quad (0 \leq k \leq n) \ ;$$

dove le matrici $J_k \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ sono definite come come segue

$$(J_k)_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } j = i + k \\ \\ 0 & \text{se } j \neq i + k \end{cases} \ , \qquad 1 \leq i, j \leq n \ , \quad (0 \leq k \leq n) \ .$$