(19/11/19)

Es 1 Sia $\mu \in (-\delta, \delta) \to A(\mu)$ una matrice reale 2×2 che dipenda in modo continuo da μ.

(i) Dimostrare che se gli autovalori di $A(0)$ hanno parte reale minore di $a < 0$, esiste $\delta_0 \leq \delta$ tale che gli autovalori di $A(\mu)$ hanno parte reale minore di $a/2$ per ogni $|\mu| \leq \delta_0$

(ii) Si consideri il sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(B_r(0) \times (-\delta, \delta), \mathbb{R}^2)$. Si assuma che $f(0,0) = 0$ e che $f_x(0,0)$ abbia due autovalori con parte reale negativa. Dimostrare che, per μ sufficientemente piccolo, esiste un unico punto fisso x_μ asintoticamente stabile e che $\mu \to x_\mu$ descrive una curva regolare che passa per 0.

Es 2 (i)* Sia $J = \lambda I + N$ un blocco di Jordan $n \times n$ invertibile (ossia $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$). Dimostrare che esiste una matrice $B = B(\lambda)$ tale che $\exp B = J$.

(ii) Dimostrare che se $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (matrici complesse di ordine n invertibili), allora esiste B tale che $\exp B = A$. Tale matrice B si denota $\log A$ ed è *un* logaritmo di A.