(23/10/19)

Definizioni

Tutti gli spazi vettoriali considerati hanno come campo di scalari $\mathbb{C}$.

(i) *Isomorfismo canonico*

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Fissata una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ in V , definiamo l'isomorfismo canonico

$$\phi_B : v \in V \rightarrow x = \phi_B(v) \in \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ è l'unico $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $v = \sum_{j=1}^n x_j u_j$.

(ii) *Mappe lineari e matrici*

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione, rispettivamente, n e m ; sia $L : V \rightarrow W$ una mappa lineare; siano B e B' due basi rispettivamente, di V e W . Esiste una ed una sola matrice

$$A := \text{mat}_{B, B'}(L) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m \times n) \quad (2)$$

tale che

$$Ax = \phi_{B'} L \phi_B^{-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}^n. \quad (3)$$

Dati m vettori $u^j \in \mathbb{C}^n$ denotiamo con $[u^1, \dots, u^m]$ la matrice $(n \times m)$ che ha per colonne i vettori u^j , più precisamente:

$$([u^1, \dots, u^m])_{ij} = u_i^j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4)$$

(iii) *Matrici a blocchi*

Date m matrici quadrate A_i di ordine n_i , $\beta(A_1, \dots, A_{n_m})$ denota la matrice a blocchi B di ordine

$$N = \sum_{j=1}^m n_j,$$

con le matrici A_i (in ordine) sui blocchi centrali: più precisamente gli elementi di B sono definiti come segue

$$B := \beta(A_1, \dots, A_{n_m}) \in \text{Mat}(N \times N)$$
$$B_{ij} = \begin{cases} (A_k)_{ij}, & \text{se } N_k + 1 \leq i, j \leq N_k + n_k \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5)$$

dove

$$N_1 = 0, \quad N_2 = n_1, \quad N_k = n_1 + \dots + n_{k-1}, \quad N_m := N_k = n_1 + \dots + n_{m-1}.$$

(iv) *Somma diretta di spazi vettoriali*

Siano V_j $m \geq 2$ sottospazi di uno spazio vettoriale V . Diremo che V è somma diretta dei V_i ,

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m = \bigoplus_{j=1}^m V_j \iff \sum_{j=1}^m v_j = v \text{ \& } \sum_{j=1}^m v_j = 0 \text{ con } v_j \in V_j \implies v_j = 0 \forall j. \quad (6)$$

- (v) *Polinomio caratteristico; autovalori, autovettori, molteplicità algebrica e geometrica.*
 Data una matrice $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ il suo *polinomio caratteristico* è il polinomio di grado n

$$P_{\text{car}}(z) := \det(A - \lambda I) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{a_1} \cdots (z - \lambda_m)^{a_m} = (-1)^n \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{a_j} \quad (7)$$

dove $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, $\sum_{j=1}^m a_j = n$ e $I = I_n$ denota la matrice identità di ordine n .

I numeri complessi λ_i sono gli *autovalori* di A ; a_j è la *molteplicità algebrica* di λ_j . L'insieme degli autovalori si chiama *spettro* di A e si denota $\sigma(A)$.

Il nucleo di $A - \lambda_j I$, $\text{Ker}(A - \lambda_j I)$, prende il nome di *autospazio* associato a λ_j e la sua dimensione,

$$g_j := \dim \text{Ker}(A - \lambda_j I), \quad (8)$$

prende il nome di *molteplicità geometrica* di λ_j . Gli elementi non nulli dell'autospazio $\text{Ker}(A - \lambda_j I)$ si chiamano *autovettori* di A (relativi all'autovalore λ_j) e sono tutte e sole le soluzioni (non banali) dell'equazione $Au = \lambda_j u$.

- (vi) *Matrici nilpotenti*

Una matrice $M \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ si dice *nilpotente* se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $M^m = 0$. In tal caso esiste un unico $1 \leq d \leq m$ detto *indice di nilpotenza* tale che

$$M^k = 0, \quad \forall k \geq d; \quad \forall k < d \exists u \text{ t.c. } M^k u \neq 0. \quad (9)$$

Denotiamo con $N = N_n$ la *matrice standard nilpotente* di ordine e indice n data da

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \cdots & 0 & 1 \\ & & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff N_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i + 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (10)$$

- (vii) *Polinomio minimo, autospazio generalizzato; autovettori generalizzati*

Data una matrice $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ esiste un unico polinomio (complesso) monico di grado minimo $P_{\text{min}}(z)$ tale che

$$P_{\text{min}}(A) = 0. \quad (11)$$

Infatti, il polinomio minimo è dato da

$$P_{\text{min}}(z) = (z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_m)^{d_m} = \prod_{j=1}^m (z - \lambda_j)^{d_j}, \quad (12)$$

dove $\{\lambda_j\}$ sono gli autovalori di A ($\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$) e $d_j \in \mathbb{N}$. Il nucleo di $(A - \lambda_j)^{d_j}$,

$$K_j := \text{Ker}(A - \lambda_j)^{d_j} \quad (13)$$

prende il nome di *autospazio generalizzato* di A (relativo all'autovalore λ_j) e i suoi elementi non nulli *autovettori generalizzati*.

- (viii) *Blocco di Jordan*

Il blocco di Jordan di ordine n con autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ è dato dalla matrice di ordine n

$$J_n := J_n(\lambda) = \lambda I_n + N_n. \quad (14)$$

Esercizi

1. Dimostrare che esiste una ed una sola matrice $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m \times n)$ per cui vale (3). Determinare gli elementi di matrice di A .
2. Dimostrare che se $u^j \in \mathbb{C}^n$ sono m vettori e $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(p \times n)$, allora

$$A[u^1, \dots, u^m] = [Au^1, \dots, Au^m] .$$

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e V_j m sottospazi vettoriali di V .
(a) Dimostrare che, se $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ e $n_j = \dim(V_j)$, allora

$$\sum_{j=1}^m n_j = n .$$

(b) Sia $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$. Dimostrare che ogni vettore $v \in V$ si scrive in maniera unica come $u = \sum_{j=1}^m v_j$ con $v_j \in V_j$.

4. Sia $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$, V_j , per $1 \leq j \leq m$, sottospazi di $\mathbb{C}^n$ invarianti per A (ossia, $AV_j \subseteq V_j$) con basi $B_j = \{u_1^j, \dots, u_{n_j}^j\}$. Assumiamo che $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ e sia

$$U = [u_1^1, \dots, u_{n_1}^1, \dots, u_1^m, \dots, u_{n_m}^m] .$$

Dimostrare che

$$U^{-1}AU = \beta(A_1, \dots, A_m) , \quad \text{con } A_j = \text{mat}_{B_j, B_j}(A|_{V_j})$$

[Suggerimento: basta considerare il caso $m = 2$.]

5. Dimostrare che A è diagonalizzabile se e solo se $a_j = g_j$ per ogni j . Dimostrare che si ha sempre $g_j \leq a_j$. Fare esempi in cui $a_j = 4$ e $g_j = 1, 2, 3, 4$.
6. Dimostrare che se M è nilpotente allora esiste d come in (9).
Dare esempi in $\mathbb{C}^n$ di matrici nilpotenti con indice di nilpotenza $1 \leq k \leq n$.
7. Sia $M \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ una matrice nilpotente di indice d . Dimostrare che esiste $u \in \mathbb{C}^n$ tale i vettori $u, Mu, \dots, M^{d-1}u$ sono linearmente indipendenti. Quindi $d \leq n$.
8. Sia $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ e sia $\sigma(A) = \{\lambda\}$. Assumiamo che $M := A - \lambda N$ sia nilpotente con indice n . Dimostrare che esiste una matrice invertibile U tale che

$$U^{-1}AU = J = \lambda I + N .$$

[Suggerimento: si usi l'Es 7].

- 9 Determinare spettro, molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori, polinomio minimo, autospazi e autospazi generalizzati, splitting di $\mathbb{C}^n$ ($n =$ ordine della matrice) in autospazi generalizzati delle seguenti matrici:

$$A = \beta(J_4, J_2, J_1, J_1) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(8 \times 8), \text{ con } J_k := J_k(\lambda) \text{ per un dato } \lambda \in \mathbb{C} .$$

$$B = \beta(J_3(\lambda_1), J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2)) \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(6 \times 6) \text{ con } \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C} .$$