(25/12/19)

Notazioni:

C_{per} denota le funzioni $u \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π–periodiche.

Dato $\xi \geq 0$, $\mathcal{H}_\xi := \Big\{ u \in C_{\text{per}} \Big| \, \|u\|_\xi := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| e^{|n|\xi} < +\infty \Big\}$, dove $u_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} dx$.

Dati $\omega > 0$ e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Du(x) := u\big(x + \frac{\omega}{2}\big) - u\big(x - \frac{\omega}{2}\big) =: u^+(x) - u^-(x)$.

$\mathcal{D}_{\gamma,\tau} := \Big\{ \omega \in \mathbb{R} \Big| \, |\omega n - m| \geq \frac{\gamma}{|n|^\tau} \;, \quad \forall\, n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \Big\}$.

Data $u \in \mathcal{H}_\xi$, $\xi > 0$, con $u_0 = 0$, $(D^{-1}u)(x) := \frac{1}{2i} \sum_{n \neq 0} \frac{u_n}{\operatorname{sen}(n\omega/2)} e^{inx}$.

Esercizio 1 Sia $u \in \mathcal{H}_\xi$ con $u_0 = 0$, $\omega \in \mathcal{D}_{\gamma,\tau}$, $0 < \delta \leq \xi$, $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p + q > 0$. Determinare costanti $c_{pq} > 0$ tali che

$$\big\| \partial_x^p D^{-q} u \big\|_{\xi - \delta} \leq c_{pq} \frac{\|u\|_\xi}{\gamma^q \, \delta^{q\tau + p}} \;.$$

Esercizio 2* (facoltativo) (i) Sia $f \in \mathcal{H}_\xi$ con $f_0 = 0$ e $\omega \in \mathcal{D}_{\gamma,\tau}$. Sia $0 < \xi' < \xi$. Dimostrare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che se $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ allora esiste $u \in \mathcal{H}_{\xi'}$ con $u_0 = 0$ tale che $1 + u_x > 0$ e

$$D^2 u(x) + \varepsilon f\big(x + u(x)\big) = 0 \;.$$

(ii) Determinare ε_0.
(iii) Discutere l'unicità di u.