(26/11/19)

Definizione $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ è una *curva regolare* (non chiusa) se

$$\gamma = \{\phi(t) \big| \, t \in [a,b]\} = \phi([a,b])$$

con $a < b$, $\phi \in C^1([a,b])$, iniettiva e tale che $\phi'(t) \neq 0$ per ogni t.
La funzione ϕ è una *parametrizzazione* di γ; $\phi(a)$ e $\phi(b)$ sono gli *estremi* di γ.
Diremo che γ è C^k se γ ha una parametrizzazione $C^k([a,b])$, $(k \geq 1)$.

Es 1 Sia $\gamma = \phi([a,b])$ una curva regolare (ϕ parametrizzazione di γ).
Per ogni $t, s \in [a,b]$ sia

$$r(t,s) := \phi(t) - \phi(s) - \phi'(s)\ (t-s)\ .$$

(i) Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|r(t,s)| < \varepsilon |t-s|\ , \qquad \forall\ t,s \in [a,b]\ ,\ |t-s| < \delta\ .$$

(ii) Dare una stima di δ nel caso γ sia C^2.

Es 2 Sia $\gamma = \phi([a,b])$ una curva regolare (ϕ parametrizzazione di γ) e sia $0 < \delta < (b-a)/2$. Dimostrare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\forall\ z \in \phi([a+\delta, b-\delta])$, $\exists!\ a < t_- < t_+ < b$ tali che

$$B_\varepsilon(z) \cap \gamma = \phi\big((t_-, t_+)\big)\ , \qquad |\phi(t_\pm) - z| = \varepsilon\ .$$

Es 3 Sia $\gamma = \phi([a,b])$ una curva regolare C^2 in $\mathbb{R}^2$ (ϕ parametrizzazione di γ). Si identifichi $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ (cosicché, $\phi = (\phi_1, \phi_2) = \phi_1 + i\phi_2$, $\phi_j \in \mathbb{R}$, etc.) e sia

$$\Phi(t,\tau) := \phi(t) + i\tau\phi'(t)\ , \qquad t \in [a,b]\ ,\ \tau \in \mathbb{R}\ .$$

(i) Dimostrare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\Phi : [a,b] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to \Phi\big([a,b] \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\big) \subseteq \mathbb{C}$$

è biunivoca, C^2 con inversa C^2. In particolare,

$$\Phi([a,b], \tau) \cap \gamma = \emptyset\ , \qquad \forall 0 < |\tau| \leq \varepsilon_0\ .$$

[**Suggerimento:** $(t,\tau) \mapsto (x,y) = \Phi(t,\tau)$ è un cambiamento di coordinate locali regolare vicino a γ.]

(ii) Sia $0 < \delta < (b-a)/2$ e

$$0 < \varepsilon_1 < \min\{\varepsilon_0, |\phi(a+\delta) - \phi(a)|, |\phi(b-\delta) - \phi(b)|\}\ .$$

Sia $W := \Phi\big([a+\delta, b-\delta] \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]\big)$. Per $z \in W_\delta \backslash \gamma$, si definisca $\operatorname{sgn}_\phi(z)$ (*segno di* z rispetto a ϕ) come $\operatorname{sgn}(\tau)$ dove $z = \Phi(t,\tau)$. Siano

$$W_+ = \{z \in W_\delta \backslash \gamma \big|\ \operatorname{sgn}_\phi(z) > 0\}\ , \qquad W_- = \{z \in W_\delta \backslash \gamma \big|\ \operatorname{sgn}_\phi(z) < 0\}\ .$$

Dimostrare che $W_\delta \backslash \gamma = W_+ \dot{\cup} W_-$ ($W_+ \cap W_- = \emptyset$) e che $W_\pm$ sono connessi (per archi) con frontiera comune $\phi([a+\delta, b-\delta]) = \gamma \cap W$.

Osservazione: L'Es 3 fornisce, nel caso di curve regolari C^2, enunciati (più forti) e dimostrazioni alternative ai Lemmi 1 e 2 di [1].

[1] R. N. Pederson, *The Jordan Curve Theorem for Piecewise Smooth Curves*. The American Mathematical Monthly, Vol. 76, No. 6 (Jun. - Jul., 1969), pp. 605-610 (https://www.jstor.org/stable/i315007)