mercoledì 11 novembre 2020 16:27

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \qquad A \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$$

$$x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

N.B. $\dot{x} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $|f| \leq \alpha + \beta|x|$

$\Rightarrow$ le soluz. $\exists!$ su $\mathbb{R}$.

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$$

Def. $\dot{x} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \,|$

$(*)$ $\left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \dot{x}(t) \right\| < \varepsilon \quad \forall \ 0 < |h| < \delta.$

norma qualunque in $\mathbb{R}^n$.

Dall'equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^n$.

e quindi dal fatto che $\exists \ a, b > 0 \,|$

$$\|x\| \leq a\|x\|_\infty \leq b\|x\|$$

segue che $(*)$ è vera se e solo se è vera

$$\left| \frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h} - \dot{x}_i(t) \right| < \varepsilon, \ \forall \ 0 < |h| < \delta.$$

stesse osservazioni per passare a valori matriciali $\left(Mat_{\mathbb{R}}(n\times n) \cong \mathbb{R}^{n^2} \right)$

isomorfismo di spazi vettoriali

$t \to A(t) \in Mat_{\mathbb{R}}(n\times n)$

diciamo che $A(t)$ è derivabile se $\exists\ B(t) = \dot{A}(t)$

t.c. $\forall \varepsilon\ \exists \delta \mid$

$$\left\| \frac{A(t+h) - A(t)}{h} - B(t) \right\| < \varepsilon, \quad \forall\ 0<|h|<\delta$$

qualunque norma su $Mat_{\mathbb{R}}(n\times n)$ e per l'equivalenza delle norme su segue, di nuovo, che

$A(t)$ è derivabile $\Leftrightarrow$ sono derivabili gli elementi di matrice $t \to A_{ij}(t)$

(Questo argomento non si generalizza a spazi di Banach infinito dimensionali dove, in generale, si parla di derivata forte $\|\cdot\|$ e di derivata debole)

Norma operatoriale su $Mat_{\mathbb{R}}(n\times m) = \mathcal{M}$

$A \in \mathcal{M} \qquad \|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \|\underset{\mathbb{R}^n}{Ax}\| / \|x\|$

R^n

$$A : x \in \mathbb{R}^n \to Ax \in \mathbb{R}^m$$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

Più precisamente:

$$\Rightarrow \|A\|_{a,b} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_b}{\|x\|_a} = \sup_{\|x\|_a = 1} \|Ax\|_b = \sup_x \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_a}\right)\right\|_b$$

La più semplice è $\|\cdot\|_a = \|\cdot\|_b = \|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$

Es. Dimostrare:

$$\|A\|_{\infty,\infty} =: \|A\| = \underbrace{\sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty}_{} = \underbrace{\max_i \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|}_{M}$$

$\forall\ x \mid \|x\|_\infty = 1$, $\|A\| \leq M$:

$$\max_i |(Ax)_i| = \max_i \left|\sum_j A_{ij} x_j\right| \leq$$

$$\leq \max_i \sum_j |A_{ij}|\,|x_j| \leq \max_i \sum_j |A_{ij}| = M$$

$$\Rightarrow \|A\|_{\infty,\infty} \leq M.$$

Fissiamo i

$$(Ax)_i = \sum A_{ij} x_j$$

sia $x_j = \operatorname{sgn} A_{ij}$ $\quad \to \|x\| \leq 1.$

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

$$(Ax)_i = \sum_j |A_{ij}|$$

$$\|A\| \geq \|Ax\| \geq \sum |A_{ij}|$$

$\Rightarrow \quad M \leq \|A\|$.

N.B. $\quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

essendo $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Def } A \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n) \\ \exp(A) =: e^{A} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\end{array}}$$

dove

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall A$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$$

nel senso di $\left(Mat_{\mathbb{R}}(n \times n), \|\cdot\|\right)$

Infatti,

$$A_N := \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$$

$$\|A_N - A_M\| = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \frac{A^k}{k!} \right\|$$

$N > M$

$$\leq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

dis. triang.

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

è vero perché $\|\cdot\|$ è

delle norme operatoriali

$\longrightarrow 0$ quindi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$

$\sup_{|x|=1} \|A(\underbrace{Bx})\| \le \sup \|A\| \|Bx\| \le \sup_{\|x\|=1} \|A\|\|B\| \underset{1}{\underset{\|}{\|x\|}}$

$= \|A\| \|B\|.$

Sappiamo che per $n \ge 2$, $GL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$ invertibili$\}$.

è un gruppo non commutativo.

$[A,B] := AB - BA$, A e B commutano

Lemma 1 Se $[A,B] = 0 \Rightarrow \exp(A+B) = \exp A \cdot \exp(B)$

$= \exp(B) \cdot \exp A$

Dim Osserviamo che $[A,B] = 0 \Rightarrow$ vale la formula del binomio di Newton ossia

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$$

$$\Big((A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underbrace{AB + BA} + B^2 =$$

$$\underset{[A,B]=0}{=} A^2 + 2AB + B^2, \quad \text{etc} \Big)$$

e quindi possiamo ripetere la stessa dimostrazione per l'esponenziale ordinario.

$$\exp(A+B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0} \sum_{j=0} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= \sum_{\substack{0\le j\le k \\ (j,k)\in \mathbb{N}_0^2}} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!}$$

teorema di Fubini discreto.

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}} \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{B^h}{h!}}$$

$h = k-j$

$$= \exp(A)\cdot \exp(B). \blacksquare$$

$\exp(0) = I$ ✓

$$0^0 + \frac{0^1}{1} + \frac{0^2}{2!} \quad \ldots \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$I = \exp(0) = \exp(A-A) \overset{\text{lemma}}{=} \exp(A)\,\underline{\exp(-A)}$$

$$\Longrightarrow \exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$$

Quindi

$$\exp: \underbrace{Mat_{\mathbb{R}}(n\times n)}_{\text{gruppo additivo}} \longrightarrow \underbrace{GL(n,\mathbb{R})}_{\text{gruppo moltiplicativo}}$$

omomorfismo di gruppi.

Lemma 2 $\frac{d}{dt}\exp(At) = \underline{A\exp(At)}$.

Oss. $[A, \exp(At)] = 0$ infatti $\quad \left([A,B]=0 \iff AB = BA\right)$

$$A \exp(At) = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \right) A$$

Dim.
$$\frac{\exp(A(t+h)) - \exp(At)}{h}$$

Lemma 1
$$= \frac{\exp(At) \cdot \exp Ah - \exp(At)}{h}$$

$$= \underline{\exp(At)} \underbrace{\frac{\exp(Ah) - I}{h}} \leftarrow$$

$$\frac{\exp(Ah) - I}{h} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ah)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{A^k}{k!} h^{k-1}}$$

$$= \underline{A} + \frac{A^2}{2} h + \frac{A^3}{6} h^2$$

$$= A + h \cdot \underbrace{\left(\frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} h + \dots \frac{A^k}{k!} h^{k-2} \right)} \xrightarrow[h \to 0]{} A$$

e $\underline{|h| < 1}$. $\quad \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}} = \overline{e^{\|A\|} - 1 - \|A\|} < \boxtimes$

Corollario la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è $x(t) = \exp(At)\, x_0$.

Infatti, $x(0) = x_0$

e $\dot{x} = \left(\frac{d}{dt}\exp(At)\right) x_0 = A\left(\exp(At) \quad x_0\right)$

$= A\, x(t)$.

Es. Calcolare $\exp A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

non c'entra col commutatore.

AU $\quad U = [u, v]$ $\quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$Au = 2u \quad Av = 3v$

$$\underline{AU = [Au, Av] = [2u, 3v] = U \cdot \Lambda}$$

con $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$U \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_1 & 3v_1 \\ 2u_2 & 3v_2 \end{pmatrix} = [2u, 3v]$$

$$U^{-1} A U = \Lambda$$

<u>Lemma 3</u> Se U è invertibile allora $\forall A$:

$$U^{-1} \exp(A) U = \exp(U^{-1} A U).$$

Dim.

$$U^{-1} \exp(A) U = U^{-1} \left(\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right) \right) U$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{N} U^{-1} \frac{A^k}{k!} U \right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(U^{-1} A U)^k}{k!} = \exp(U^{-1} A U)$$

$$(U^{-1} A U)^2 = (U^{-1} A \cancel{U}) \cdot (\cancel{U}^{-1} A U) = U^{-1} A^2 U.$$

(per induzione)

$$\exp \Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \qquad \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad e^{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} A U = \Lambda \qquad A = U \Lambda U^{-1}$$

$$U^{-1} = - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\exp At = U \cdot \exp(\Lambda t) \cdot U^{-1}$$

$$= U \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} U^{-1}$$

Venerdì 13 non c'è lezione.
Ci vediamo lunedì.