lunedì 12 ottobre 2020 16:20

SISTEMI AUTONOMI su $\mathbb{R}^n$

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, lipsch. su U.

Denotiamo con $\phi^t(x_0)$ il "flusso" associato al sistema $(*)$, ossia,

$x(t) := \phi^t(x_0)$ è l'unica soluzione del $(*)$,

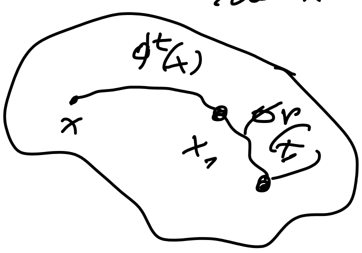
in altre parole $\phi^t(x_0)$ soddisfa

(i) $\phi^0(x_0) = x_0$, su U

(ii) $D_t \phi^t(x_0) = f(\phi^t(x_0))$, $t \in \overbrace{(\underbrace{T_-(x_0)}_{\text{interv. max di } \exists.}, T_+(x_0))}^{I(x_0)}$

(iii) $\phi^{t+s}(x) = \phi^t(\phi^s(x))$

$\left(\forall\ t+s \in I(x),\ t \in I(x),\ s \in I(\phi^t(x)) \right)$



Dim. (iii): $\tilde{x}(t) := \phi^{t+s}(x)$

$$\begin{cases} \tilde{x}(0) = \phi^s(x) = x_1 \\ \frac{d}{dt}\tilde{x} = \dot{\phi}^{t+s}(x) = f(\phi^{t+s}(x)) = f(\tilde{x}) \end{cases}$$

$\tilde{x}(t) = \phi^t(x_1)$. ∎

Oss. Non può succedere che

$\lim \phi^t(x) = \bar{x} \in U$, $T_\pm \in \mathbb{R}$.

$t \to T_\pm$

altrimenti potremmo estendere la soluzione considerando il problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = \bar{x} \end{cases}$$

Proprietà qualitative di soluzioni di equazioni scalari del primo ordine.

(in particolare equi a variabili separabili)

(1) $\dot{x} = h(t)\, g(x)$

Lemma 1 Se $h \not\equiv 0$ allora $x(t) \equiv x_0 \in \mathbb{R}$

è soluzione di (1) $\iff g(x_0) = 0$.

Dim "$\Leftarrow$": $g(x_0) = 0$, $x(t) \equiv x_0$ è soluzione di (1).

"$\Rightarrow$" $x(t) \equiv x_0$ è soluz. $\Rightarrow 0 = h(t)\, g(x_0)$, $\forall t$

ma se $h \not\equiv 0 \iff \exists t_0 \,|\, h(t_0) \neq 0 \Rightarrow g(x_0) = 0$. $\boxtimes$

Oss. non usiamo proprietà particolari di h o g.

$\to$ Assumiamo unicità locale (ad esempio, g Lipsch.).

Corollario. Soluzioni di (1) non possono "attraversare" zeri di g.

Ossia se $x(t)$ è sol. di (1) e $x(t_1) = x_0$, con $g(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$.

$f(x) =$

Deriva immediatamente dall'unicità.

Consideriamo il caso $h(t) \equiv 1$. Ossia

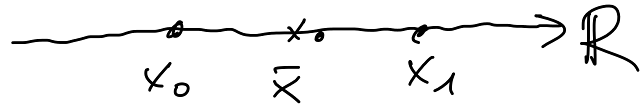
$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x). \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Primo passo è trovare $Z(g) = \{x_0 \mid g(x_0) = 0\}$.

che sono, per il Lemma 1, soluzioni stazionarie o equilibri

Esempio

$Z(g) = \{x_0, x_1\}$



$$\phi^t(\bar{x}) = x(t)$$

$$\dot{x}(0) = g(\bar{x}) \neq 0.$$

Se, ad esempio, $g(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \dot{x}(0) > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_1$$

In particolare non ci può essere comportamento oscillatorio.

Lemma 2 Assumiamo $g \in C^1(I)$, I int. aperto di $\mathbb{R}$. Le soluzioni di (2) non hanno massimo o minimo stretti.

(i) $g(x_0) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$ è un equilibrio

(ii) $g(x_0) > 0$ allora $x(t)$ è strett. crescente su $I(x_0)$ (su $I(x_0)$).

(iii) $g(x_0) < 0$ " " è decrescente su $I(x_0)$

Dim. Se $x(t)$ ha un max (min) stretto

$\overline{\text{in}}\ t_0$ $\quad \dot{x}(t_0) = 0 = \underline{g(x_0)} \Rightarrow x(t) \equiv x_0$,

contradd.. per il lemma 1.

(ii) segue dal lemma 1.

(iii) $g(x_0) > 0 \Rightarrow \dot{x}(0) > 0 \Rightarrow x$ loc.

strett. crescente. Dic $I_x = \{t > 0 \mid \dot{x}(s) > 0$

$\forall\ 0 \le s \le t\}$. $\tau = \sup I_x$ se $\tau = +\infty$

abbiamo finito. Se $\tau < +\infty$

$\lim_{t \to \tau} \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}(\tau) = 0 \Rightarrow x(\tau)$ è

un equilibrio $\Rightarrow$ Contraddiz.

Analog. per (iii).

Lemma 3 Se $x(t)$ è sluz di (2)

e $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = \bar{x}_\pm \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\bar{x}_\pm$ è uno zero di g.

Dim Se $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}_+ \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} g(\bar{x}_+)$$

$\exists$ il $\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = g(\bar{x}_+) \in \mathbb{R}$

Se $x(t) \equiv \bar{x}_+$ la tesi è banalmente vera.

Se $x(t) \not\equiv$ cost. Per il lemma 2 $x(t)$

è strett. monotona. Se $x(t) \nearrow$

allora $\bar{x}_+ = \sup x(t)$.

Se $x(t)\downarrow$, allora $\bar{x}_+ = \inf x(t)$.

Supponiamo, ad esempio, che $x(t) \nearrow \bar{x}_+$.

<u>Oss.</u> Se $y(t)$ è una funzione definita su $\mathbb{R}$, differenziabile, crescente, limitata ed $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} \dot{y}(t) \in \mathbb{R}$.
Allora $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{y}(t) = 0$.

(<u>Dim</u> $\dot{y} \geq 0$ poiché crescente. $\Rightarrow M := \lim\limits_{t\to+\infty} \dot{y}(t) \geq 0$.

Assumiamo, per assurdo, che $M>0$

$$\lim_{t\to+\infty} \big(y(t+1)-y(t)\big) \underset{\uparrow}{=} \lim_{t\to+\infty} \dot{y}(t+c) = M > 0$$

$\| \qquad$ Lagrange $0<c<1$ $\qquad$ contraddiz.)

0

<u>N.B.</u> L'ipotesi che $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} \dot{y}$ è essenziale.

Esempio di funzione $y(t)$, C^∞, crescente, limitata (quindi $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) \in \mathbb{R}$) ma con $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{y} \not\exists$.

$\forall n$, sia $\psi_n \in C^\infty([0,1])$ t.c.

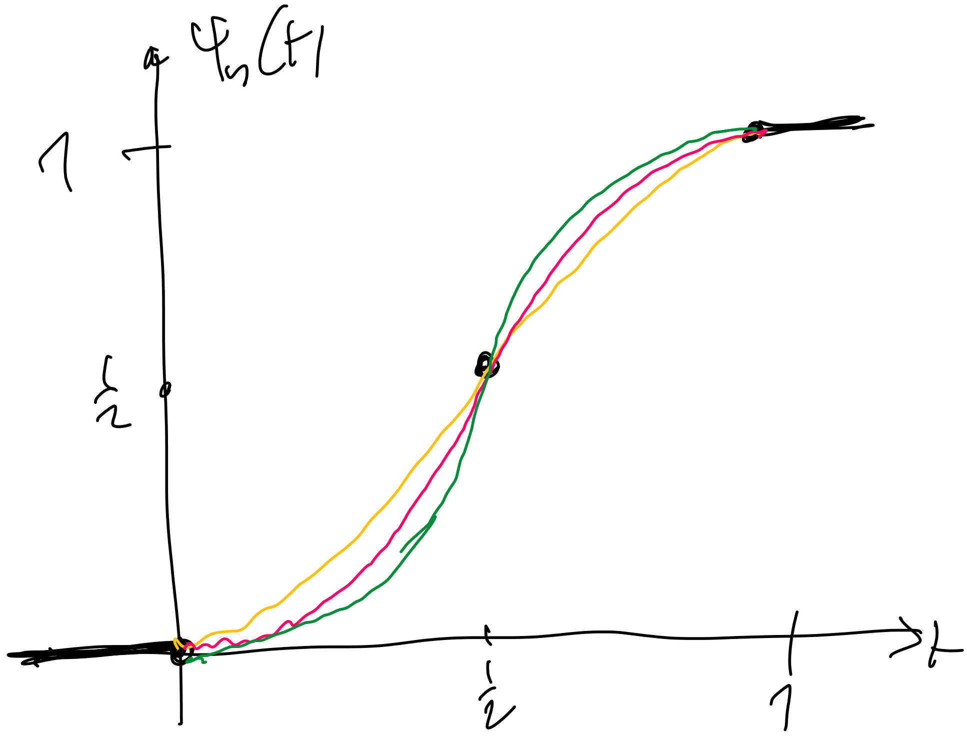
(i) $\psi_n(0)=0$, $\psi_n(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$, $\psi_n(1)=1$

(ii) $\psi_n' \geq 0$

(iii) $\psi_n^{(k)}(0) = \psi_n^{(k)}(1) = 0$, $\forall\ k\geq 1$

(iv) $\psi_n'(\tfrac{1}{2}) = 4^n$.

Es. Costruire tali funzioni.



Definiamo $y(t)$ come segue

$y(t) \equiv 0$ se $t < 1$.

Sia $n \leq t < n+1$ $(n \in \mathbb{N})$

$$y(t) := \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \varphi_n(t-n)$$

$$y(n) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

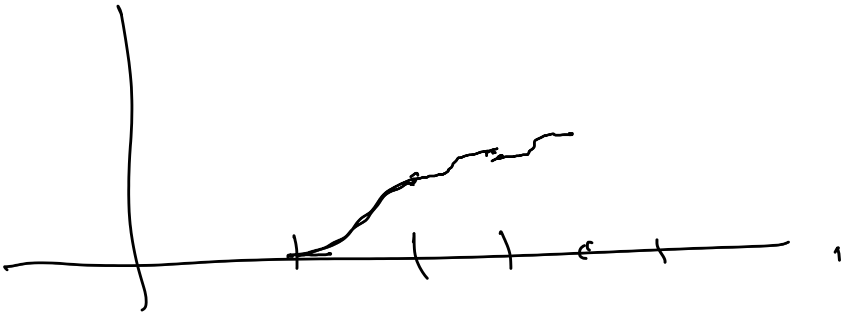
$$y((n+1)-) = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$= y((n+1)+)$$

$$\Rightarrow \quad y \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

$$\lim y(t) = 1.$$

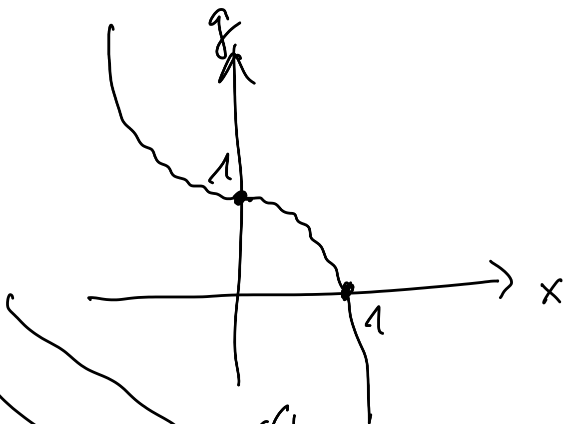
$t \to +\infty$

$$\dot y\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\, y_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4^n}{2^{n+1}} \nearrow +\infty.$$

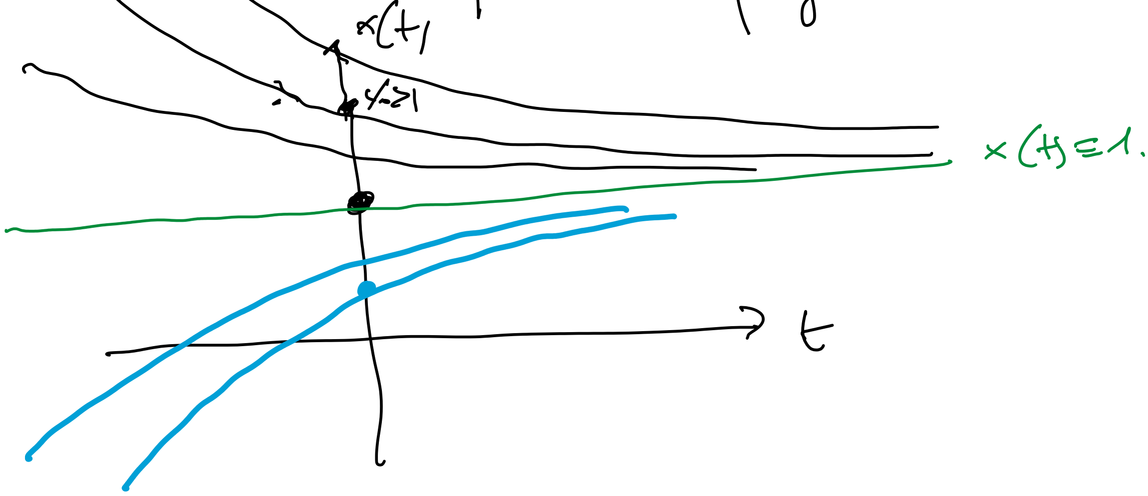


Es. $\dot x = 1 - x^3 = g(x)$

$Z(g) = \{1\}.$



$$\begin{cases} g > 0 & \text{se } x < 1 \\ g < 0 & \text{se } x > 1 \\ g = 0 \iff x = 1 \end{cases}$$



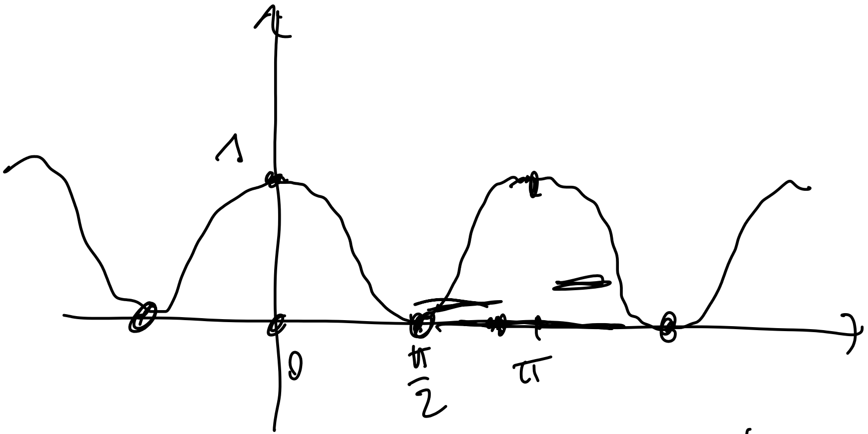
Es 8 (§3.5 [AA])

Mostrare che le soluzioni di $\dot x = \cos^2 x$

fino ... di t.

Segue dal Corollario lez. del 9/10.

Facciamo molto di più:



$$Z(\cos^2 x) = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$x_0 \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi , \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right) \leftarrow \cos^2 x > 0 .$$

e $$\lim_{t \to +\infty} \phi^t(x_0) = \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$$

$$\lim_{t \to -\infty} \phi^t(x_0) = \frac{\pi}{2} k\pi .$$