mercoledì 14 ottobre 2020 16:04

ES 24 Cap. 3. [AA]

Mostrare che la soluzione del (PC)

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 - t^3 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

ha un massimo stretto in $t_0 = 1$.

---

(1) Dimostriamo che $t_0 = 1$ è un max locale stretto.

$$\dot{x}(1) = x(1)^2 - 1^3 = 0.$$

$t_0 = 1$ è un p.to critico.

$$\rightarrow \ddot{x}\big|_{t=1} = (2x\underbrace{\dot{x}}_{0} - 3t^2)\big|_{t=1} = -3 < 0 \Rightarrow t_0 \text{ è un max loc. stretto.}$$

---

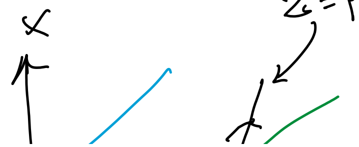
(2) $t_0 = 1$ è un max globale?

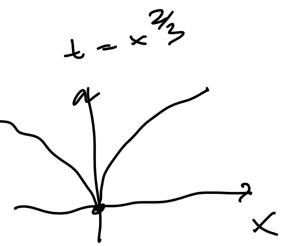
$$\dot{x} = x^2 - t^3 =: f(x,t)$$

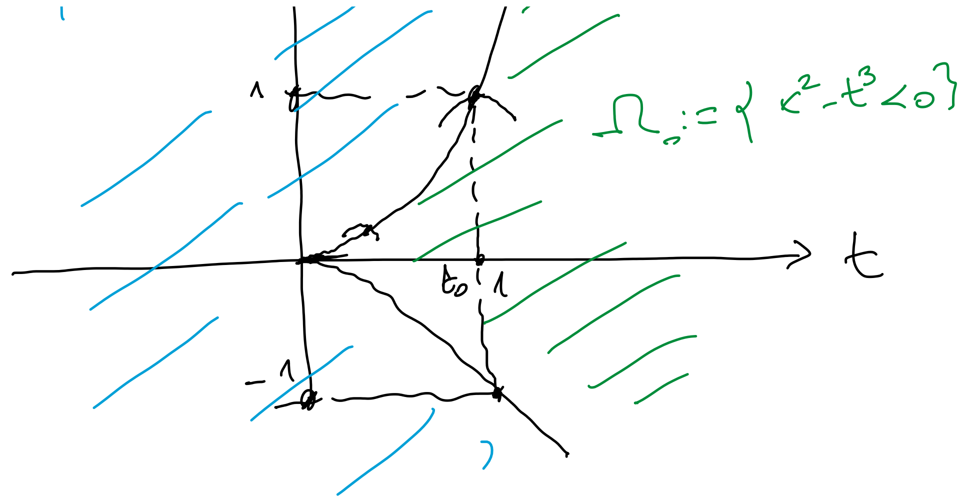
$$\dot{x} = 0 \iff x^2 - t^3 = 0 \iff t = x^{2/3}$$

$\Sigma = \{x^2 - t^3 = 0\}$

$R_+ := \{x^2 - t^3 > 0\}$





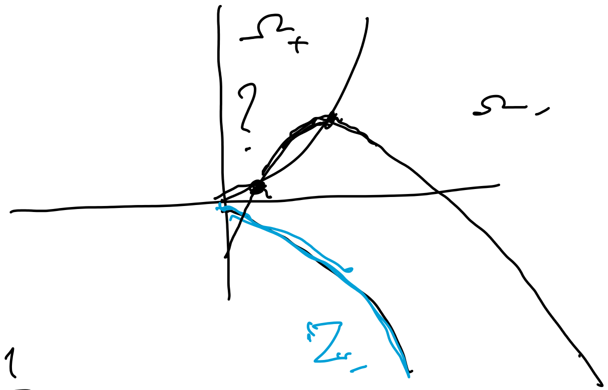


$(t, x) \in Z \iff \dot{x}(t) = 0$

$\ddot{x}(t) = -3t^2 < 0 \quad \forall\, t > 0, \quad$ per $t=0$, $\ddot{x}(0) = 0$.

$\forall\, t > 0 \qquad (\bar{t}, \bar{x}) \in Z \qquad \begin{cases} \dot{x} = x^2 - t^3 \\ x(\bar{t}) = \bar{x} \end{cases}$

per t piccoli, $t > \bar{t}$, $(t,x) \in \Omega_-$; $t < \bar{t}$, $(t,x) \in \Omega_+$



$\underline{t > 1}$

finché $(t, x(t)) \in \Omega_-$ la soluzione $x(t)$ è strett. decrescente

$A_+ := \{ t \ge 1 \mid \dot x(s) < 0 \ \ \forall\ 1 \le s \le t \}$

$1 \in A_+$ e sia $\tau_+ = \sup A_+ \in [1, +\infty]$

Se $\tau_+ = +\infty$ $\quad 1 > x(t) \ \ \forall\ t > 1$.

Supponiamo che $1 < \tau < +\infty \Rightarrow \dot x(\tau_+) = 0 \Rightarrow (\tau_+, x(\tau_+)) \in Z_0$

$\Rightarrow \tau_+$ sarebbe un max loc. stretto.

ma per t vicini a τ $\ t < \tau \quad x(t) > x(\tau_+)$

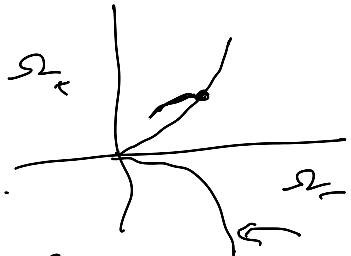
Contraddizione.

Abbiamo dimostrato che $T_+(1,1) = +\infty$

($(T_-(x_0,t_0), T_+(x_0,t_0))$ è l'intervallo massimale di $\exists$ della soluzione di $\begin{cases}\dot x = f(x,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$)

e poi che $\dot x(t) < 0 \ \ \forall\ t>1 \Rightarrow 1 > x(t) \ \ \forall\ t>1$.

Cosa succede per $t<1$.



$A_- := \{ t<1 \mid \dot x(s) > 0 \ \ \forall\ t \le s \le 1 \}$.

ES.1 ripetere l'argomento di prima

$\Longrightarrow T_-(1,1) = -\infty$ e che $\dot x(t) > 0 \ \ \forall\ t<1$

il che dimostra $x(t)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$

e poi che $t_0=1$ è un max globale.

ES 2. Studiare la soluzione di $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - t^3 \\ x(0) = 0 . \end{cases}$

$\left(f(x,t) = x^2 - t^3 \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \right)$

Cap 4. [AA] Soluzioni esplicite di alcune eqni diff. nonlineari del primo ordine. [lineari già discusse ① $\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$]

- ② Equazioni separabili $\begin{cases} \dot{x} = g(x)\,h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

già discusse

(se $g(x_0)=0 \Rightarrow x(t) \equiv x_0$ è soluz. (stazi)
se $g(x_0)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{\dot{x}}{g(x)} = h(t) \Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$)

- ③ Equazioni omogenee

$\dot{x} = f(x,t)$ con f omogenea di grado 0.

ossia $f(\lambda x, \lambda t) = f(x,t)$. $\forall \lambda \neq 0$.

$$f(x,t) = \frac{x+t}{tx}, \quad t \neq 0.$$

$$f(x,t) \underset{\uparrow}{=} f\left(\frac{x}{t}, 1\right) =: g\left(\frac{x}{t}\right), \quad \underline{g(y) := f(y,1)}$$

$\lambda = \frac{1}{t} \neq 0.$

$$g(y) = \frac{y^2+1}{y}$$

$$z(t) := \frac{x(t)}{t} \qquad \underline{x(t) = t\,z(t)}$$

$$\dot{x} = \underline{z + t\dot{z}} = g\left(\frac{x}{t}\right) = \underline{g(z)}$$

$$\dot{z} = \frac{g(z) - z}{t}$$ che è a variabili separabili

Es. risolviamo

$$\dot{x} = \frac{t^2 + tx + x^2}{t^2}, \quad t \neq 0.$$

$$g(y) = 1 + y + y^2$$

$$\dot{x} = 1 + \left(\frac{x}{t}\right) + \left(\frac{x}{t}\right)^2$$

$$z = \frac{x}{t}, \quad \dot{x} = z + \underline{t\dot{z} = 1 + z + z^2}$$

$$t\dot z = 1+z^2 \qquad \boxed{\dot z = \frac{1+z^2}{t}}$$

$$\frac{\dot z}{1+z^2} = \frac{1}{t}$$ e integrando $\quad \operatorname{arctg} z = \log|t| + c$

$$z = \operatorname{tg}(\log|t| + c)$$

$$x = tz = t\,\operatorname{tg}(\log|t| + c)$$

$$x(1) = 1$$

$$1 = \operatorname{tg} c, \qquad c = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

---

4 Equazioni di Bernoulli.

(2) $\quad \dot x = \underbrace{a(t)\,x + b(t)\,x^n}_{f(x,t)}, \qquad n \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$

Oss. (i) $n > 0$, $\quad x(t) \equiv 0$ è soluzione di (2).

(ii) $0 < n < 1 \Rightarrow f(x,t)$ non è Lip. in x.

Suggerimento: $\boxed{y = x^{1-n}} \Leftrightarrow x = y x^n$

$$\dot y = (1-n)\,x^{-n}\,\dot x \Rightarrow \dot x = \frac{\dot y\, x^n}{1-n}$$

$$\dot y\,\frac{x^n}{1-n} = a y x^n + b\,x^n$$

lineare in y

$$\boxed{\dot y = (1-n)\,a\,y + (1-n)\,b.}$$ è lineare in y.

ES. Discutere le soluzioni (3) $\begin{cases} \dot x + x = t\sqrt{x} \\ x(2) = 0 \end{cases}$ ← è Bernoulli con $n=\frac{1}{2}$

le soluzioni non negative di (3).

Oss. $x(t) \equiv 0$ è soluzione di (3)

$y = \sqrt{x}$

$\dot y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\dot x \qquad \dot x = 2\sqrt{x}\,\dot y = -x + t y$

$2\dot y = -y + t$

$2\dot y + y = t \qquad \dot y + \frac{1}{2}y = \frac{t}{2}$

$\begin{cases} (y e^{t/2})^{\cdot} = e^{t/2}\,\frac{t}{2} \\ y(2) = 0 \end{cases}$

$y e^{t/2} = 2\int_2^t e^{s/2}\cdot\frac{s}{2}\,\frac{ds}{2} = 2\int_1^{t/2} e^s s\,ds = 2\,e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}-1\right)$

$\int e^s s = e^s s - \int e^s = e^s(s-1)\Big|_{s=1} = 0$

$y(t) = (t-2)$ $\quad$ $\boxed{x(t) = (t-2)^2}$ → $t \geq 2$

$\dot x = 2(t-2) \qquad x(2) = 0$

$\ldots\; t\sqrt{x} = -(t-2)^2 + t\,|t-2|$

$\dot{x} \doteq -x + \ldots$

$$\overset{t \geq 2}{=} -\cancel{t^2} - 4 + 4t + \cancel{t^2} - \cancel{2t} = 2(t-2) \checkmark$$

$$\overset{t<2}{=} -t^2 - 4 + 4t + t(2-t)$$

$$= -2t^2 - 4 + 6t$$

$t < 2$ non è soluzione.

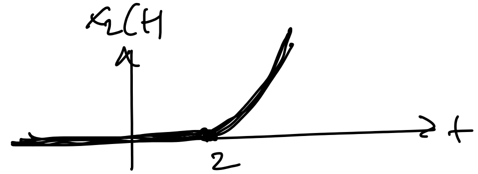
$x(t) = (t-2)^2$ è sol. di (3) per $t \geq 2$.

In questo caso non c'è unicità.

$x_1(t) \equiv 0$ sol. $C^\infty(\mathbb{R})$

$$x_2(t) = \begin{cases} (t-2)^2 & t \geq 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

$x_1 \neq x_2$



x_2 è una soluzione C^1 ma non C^2.

C^1 … ?

Es3. $\exists$ altre soluzioni di $(*)$: