venerdì 16 ottobre 2020 16:22

$F(x, \dot{x}, t) = 0$ eque non in forma normale

$\dot{x} = f(x, t)$

Eque di Clairaut (caso speciale dell'eque di Lagrange).

(C) $x = \dot{x}\, t + h(\dot{x})$ dove h è una funzione regolare data. $x = x(t)$ funzione C^1 incognita.

Osservazione ovvia:

Se $\dot{x} = p = \text{cost} \iff x(t) = pt + c$

in (C) otteniamo che la retta $x = pt + h(p)$, ($c = h(p)$)

è soluzione di (C). SOLUZIONI REGOLARI DI (C)

Supponiamo che $x(t) \in C^2$ sia soluzione di (C).

Derivando (C) otteniamo

$$\cancel{\dot{x}} = \ddot{x}\, t + \cancel{\dot{x}} + h'(\dot{x})\, \ddot{x} \iff \ddot{x}\left(t + h'(\dot{x})\right) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \ddot{x} \equiv 0 \quad \text{oppure} & (a) \\ t + h'(\dot{x}) = 0. & (b) \end{cases}$$

Nel caso (a) $\ddot{x} \equiv 0 \iff \dot{x} = p = \text{cost}$ siamo nel caso dell'OS.

Caso (b) : $t = -h'(\dot{x})$

Consideriamo la funzione $p \mapsto -h'(p)$

e supponiamo sia invertibile cioè $h''(p) \neq 0$.

$p \mapsto t(p) := -h'(p)$

e chiamiamo la funzione inversa $p = p(t)$.

Quindi

(1) $$t = t(p(t)) = -h'(p(t))$$

Lemma $\underline{X}(p) := -p\,h'(p) + h(p)$

N.B. $t = -h'(p)$

e $x_s(t) := X(p(t))$.

Allora $x_s(t)$ è soluzione di (C).

Dim.

$$x_s(t) = X(p(t)) \overset{(1)}{=} p(t)\,t + h(p(t))$$

$$\dot{x}_s(t) = \dot{p}\,t + p + h'(p(t))\,\dot{p}$$

$$= p + \dot{p}\,\big(t + h'(p(t))\big)$$

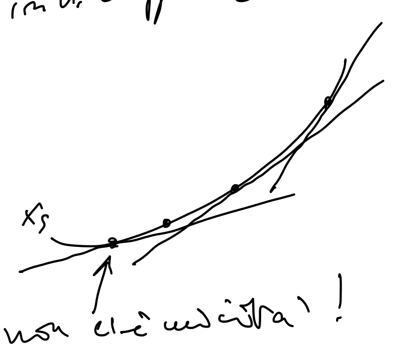
$$\overset{(1)}{=} p(t) \Longrightarrow \dot{x}_s(t) = p(t) \quad (3)$$

$$x_s(t) = X(p(t)) \underset{(1),(3)}{=} \dot{x}_s\,t + h(\dot{x}_s). \quad \blacksquare$$

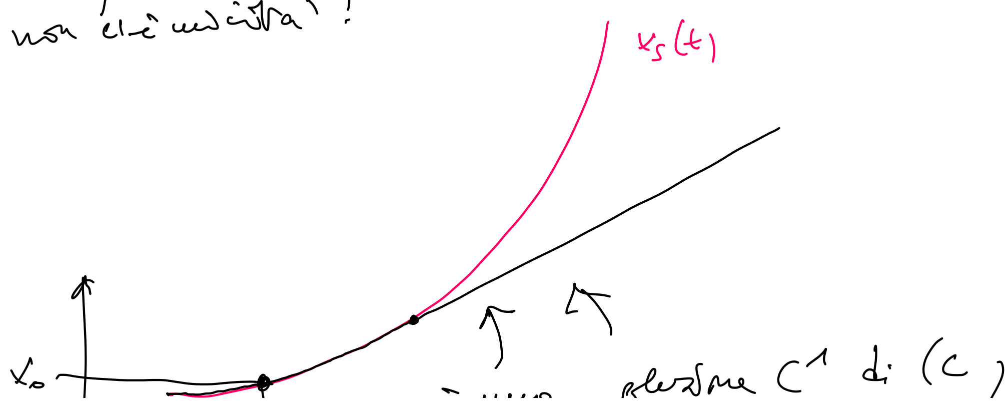
Def. $x_s(t)$ si chiama SOLUZIONE SINGOLARE di (C).

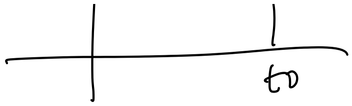
ma x_s è C^∞ se h è C^∞.

Clairaut: la soluzione singolare $x_s(t)$ è l'inviluppo delle soluzioni regolari.



queste ∞ soluzioni C^1





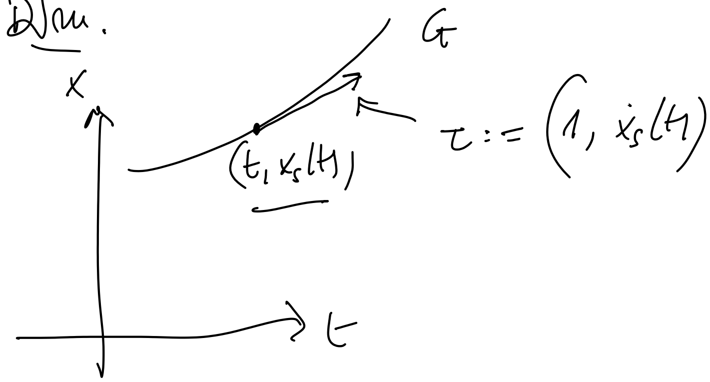
→ (C) ammette una famiglia di soluzioni regolari (le rette $x = pt + h(p)$)

→ (C) ha la soluzione C^∞ singolare (assumendo h C^∞, $h'' \neq 0$).

→ ∞ soluzioni C^1 non C^2 di uno stesso problema di Cauchy.

Lemma le rette $x = pt + h(p)$ sono tangenti a $G := \{ (t, x_s(t)) \mid t \in I \}$. intervallo di $\exists$

Dim.



Eq.ne della retta tg a G passante per $(t, x_s(t))$

→ $y = (s-t)p + x_s(t)$, con $p = \dot{x}_s(t)$

$= (s-t)p + pt + h(p) = sp + h(p)$

$y = sp + h(p)$. ∎

ESERCIZI

RICETTA CLAIRAUT! $x = \dot{x} t + h(\dot{x})$, con h data.

SOL REG $\begin{cases} x = pt + h(p) \\ p = \dot{x}(t) \end{cases}$ ← [illegible]

SOL. SING. $\boxed{t = -h'(p)}$ ← inverti (trova $p(t)$)

$$x_s(t) = p(t)\cdot t + h(p(t))$$

Es. 1 $\quad x = t\dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{2}$, $\quad \boxed{h(p) = -\frac{p^2}{2}}$

$x(t) = pt - \frac{p^2}{2}$ (sol. regolari p fissato / parametro.)

$\underline{t = p}$

$$x_s(t) = t^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$

anche $x \equiv 0$ è soluzione.

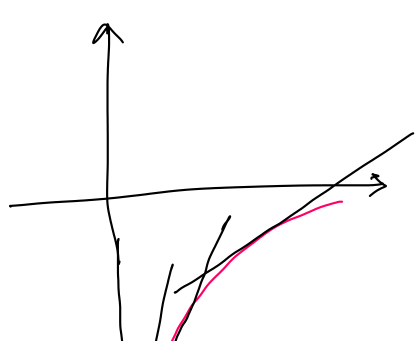
Es2 $\quad x = t\dot{x} - 2\sqrt{\dot{x}}$, $\quad \dot{x} = p \geq 0.$

$h(p) = -2\sqrt{p}$, $p \geq 0$

sol. reg. $\quad x = tp - 2\sqrt{p}$

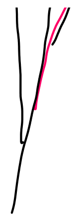
sol. sing. $\quad t = -h'(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $\quad p = \frac{1}{t^2}$

$$x_s(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{t} = -\frac{1}{t}, \quad t > 0$$



$x = tp - 2\sqrt{p}$, $\quad t \in \mathbb{R}$

$x_s(t) = -\frac{1}{t}$, $\quad t > 0.$

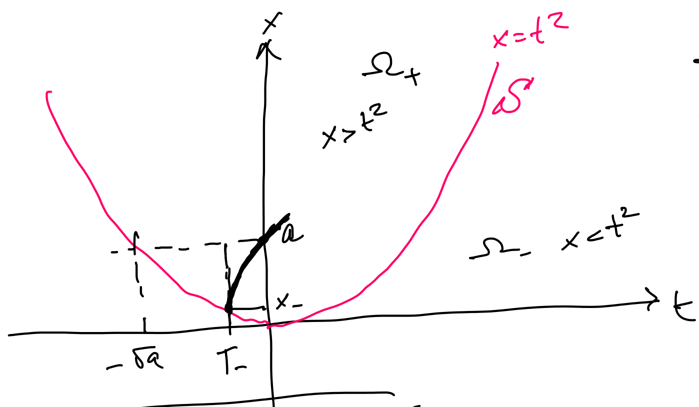


ESERCIZIO

$$(4)\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{x-t^2} = f(x,t) := (x-t^2)^{-1}. \\ x(0)=a>0 \end{cases}$$

Studiare (T_-,T_+) e i limiti $x(t)$ per $t \to T_\mp$.

$f(x,t)$ è definita per $(t,x) \notin S := \{x=t^2\}$.



$\Omega_+ = \{f>0\}$
$\Omega_- = \{f<0\}$.

$\dot{x} > 0$ finché $(t, x(t)) \in \Omega_+$

$\Updownarrow$

strettamente crescente. $t \in (T_-,T_+) = I$

Per definizione di I, $\forall\, t \in (T_-,T_+)$, $x(t) \in \Omega_+$

$x_a(t)$ soluzione di (4) è strett. crescente su I.

$$\dot{x}_a(0) = \frac{1}{a}$$

x_a è strett. CRESCENTE $\Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to T_-} x_a(t) = \inf\limits_I x_a = x_- > 0 \\ \lim\limits_{t\to T_+} x_a(t) = \underbrace{\sup\limits_I x_a}_{x_+} \in (a,+\infty] \end{cases}$

$0 > T_- > -\sqrt{a}$.

$$\ddot{x}_a = \left(\frac{1}{x_a - t^2}\right)^{\cdot} = -\frac{1}{(x_a-t^2)^2}\cdot(\dot{x}_a - 2t)$$

$$= -\frac{1}{(x_a-t^2)^2}\left(\frac{1}{(x_a-t^2)} - 2t\right)$$

$$= -\frac{1-2t(x_a-t^2)}{(x_a-t^2)^3}, \quad (x_a - t^2 > 0).$$

$\Rightarrow$ per $t \in (T_-, 0)$, $\ddot{x}_a(t) < 0$

Oss generale $(T_-, x_-), (T_+, x_+) \notin \Omega_+$

altrimenti potrei considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(T_\mp) = x_\mp \end{cases}$$

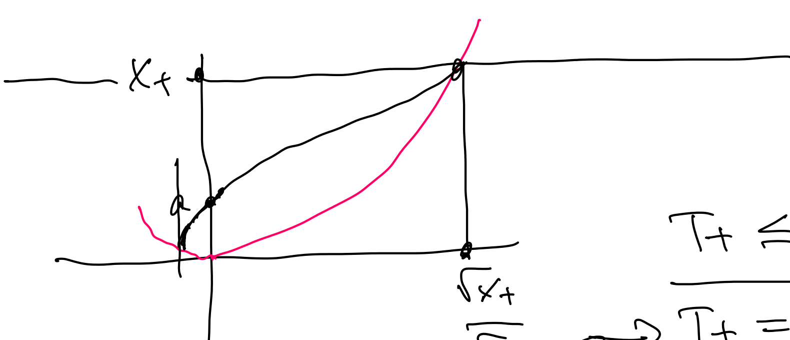
e potrei estendere la soluzione $x_a(t)$ violando il fatto che (T_-, T_+) è l'intervallo di esistenza massimale.

Quindi $\boxed{(T_-, x_-) \in \partial S}$, $\boxed{x_- = (T_-)^2}$

se $T_+ < \infty \Rightarrow (T_+, x_+) \in \partial S$

$t > 0$. $x_+ \in (a, +\infty]$

Se $x_+ < \infty$ cosa posso dire di T_+?



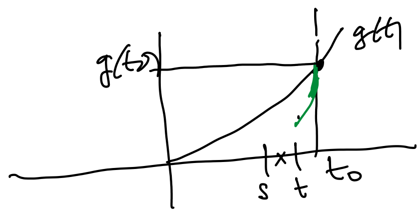
$$T_+ \leq \sqrt{x_+}$$

$\longrightarrow T_+ = \sqrt{x_+}$

... rispetto ... per $t \to 0$.

Ma questo non può essere:

perché se $(T_+, x_a(T_+)) \in \partial S \Rightarrow \dot{x}_a(T_+) = +\infty$



$0 < x$ crescente e $\dot{x}(t_0) = +\infty$

$\lim_{t \uparrow t_0} \dot{x} = +\infty$

$s < t < t_0$

Es. 1 Sia $g \in C^1([0,t_0])$, $x \in C^1([0,t_0)) \cap C([0,t_0])$ con $x(t_0) = g(t_0)$ e $\lim_{t \to t_0} \dot{x}(t) = +\infty$. Allora, $\exists\, \delta > 0$ | $x(t) < g(t)$ $\forall\, t \in (t_0 - \delta, t_0)$.

Es. 2 Dimostrare che $T_+ = +\infty$ e che $x_+ = +\infty$.

Es. 3 Studiare il caso con $a \in \Omega_-$.