lunedì 16 novembre 2020 16:20

$$(PC) \begin{cases} \dot{x} = A(t)\, x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$A(t) \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$

$t \in I \mapsto A_{ij}(t) \in C(I, \mathbb{R})$

($t \in I \mapsto A(t) \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$ è continua

ossia $\forall\, t_0 \in I,\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \,|$

$\| A(t) - A(t_0) \| < \varepsilon, \quad \forall\, 0 \le |t - t_0| < \delta$

norma su $Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$ — la più semplice norma operatoriale

(ad esempio $\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_\infty = 1}} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|$)

La norma più semplice su $Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$

$\|A\| := \max_{i,j} |A_{ij}|$

NON VERIFICA:

$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$

1. Per il Teorema di massimalità la soluzione di (PC) è massimale ossia $\exists!$ su tutto I.

2. $\mathcal{S} := \{ x \mid \dot{x} = A(t)\, x \}$ è uno spazio vettoriale

3. Se $x_1, \dots, x_n$ sono n soluzioni di $\dot{x} = A(t)\, x$

$W(t) := W(t; x_1, \dots, x_n) := \det [x_1, x_2, \dots, x_n]$

colonne

$X := [x_1, \dots, x_n] \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$

$X_{ij} = (x_j)_i$

($x_i \in \mathbb{R}^n$

$x_i = ((x_i)_1, \dots, (x_i)_n)$

$= (x_{i1}, \dots, x_{in})$)

$x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn})$, x_{ji} attenzione alla notazione.

$$W(t) = \det X(t)$$

N.B. $\dot{X} = [\dot x_1, \dots, \dot x_n] = [A x_1, \dots, A x_n]$

$$\overset{(*)}{=} A[x_1, \dots, x_n] = AX$$

Verifichiamo (*):

$$[Ax_1, \dots, Ax_n]_{ij} = (Ax_j)_i = \sum_k A_{ik} x_{jk}$$

$$(A[x_1, \dots, x_n])_{ij} = \sum_k A_{ik} [x_1, \dots, x_n]_{kj}$$

$$= \sum_k A_{ik} x_{jk} \quad \checkmark$$

Se $x_1, \dots, x_n$ sono soluzioni indipendenti $\Rightarrow W(t) \neq 0\ \forall t$.

$\left(\sum a_i x_i = 0 \Rightarrow a_i = 0\ \forall i \right)$

$\Updownarrow$

$\sum a_i x_i(t) \equiv 0, \forall t \in I$.

Quindi se $\exists t_0 \mid W(t_0) = 0 \Rightarrow$ le funzioni $x_i(t)$ sono lin. dip.

4. Formula di Abel $\boxed{W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right)}$

(in particolare se $\mathrm{tr}\, A(t) = 0 \Rightarrow W(t) \equiv W(t_0), \forall t$)

Dim. (es.), 18/11/20. N.B. $\dot W = a(t) W$, $a(t) := \mathrm{tr}\, A(t) = \sum_i A_{ii}(t)$.

5. $x_1, \dots, x_n$, soluzioni di $\dot x = Ax$, sono linearmente

indip $\iff W(t_0) \neq 0$ per ... ...

6. $(1) \begin{cases} \dot{x} = A(t)\, x \\ x(t_0) = e_j \end{cases}$ $\qquad e_j = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\circ}\text{-posto}}}{1}, \dots, 0)$

$\exists !$ n soluzioni di (1) (su I). $x_1, \dots, x_n$

$\underline{X}(t) = [x_1, \dots, x_n]$, $\quad \underline{X}(t_0) = [e_1, e_2, \dots, e_n] = I$

e la soluzione di (PC) $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

è data $x(t) = \underline{X}(t)\, x_0$

$\dot{x} = (\underline{X}(t)\, x_0)' = \dot{\underline{X}}\, x_0 = (A\, X)\, x_0 = A(X x_0)$

$= Ax$

$\underline{X}(t_0)\, x_0 = I x_0 = x_0.$

$\underline{X}(t) := \underline{X}(t; t_0)$ è la soluzione fondamentale dell'equa $\dot{x} = Ax$ (rispetto a t_0).

$\partial_t \underline{X}(t; t_0) = A X(t; t_0)$ e $X(t_0, t_0) = I$.

7. Quindi $S = \{ x \mid \dot{x} = Ax \}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.
(base è data da $x_1, \dots, x_n$ con $x_i \in S$ e lin. indip., come ad esempio, le n soluzioni di (1), $1 \le j \le n$).

N.B. $\underline{\underline{X}(t)}\, \underline{x_0} = \underline{[x_1, \dots, x_n]\, x_0}$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_{0k}\, x_k$$

scalari   vettori

Verifichiamo:

$$\left(\underline{\underline{X}(t)\, x_0}\right)_i = \sum X_{ik}\, x_{0k} = \sum x_{ki}\, x_{0k}$$

$$= \left(\sum_k x_{0k}\, x_k\right)_i$$

---

8. Formula di Duhamel (a volte, PRINCIPIO DI DUHAMEL)

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + h(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$ CASO NON OMOGENEO

Sia $x(t) = \underline{\phi(t; s, x_0)}$ la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(s) = x_0 \end{cases}$$

flusso con dato iniziale x_0 al tempo $t = s$

Se $\underline{X}(t, s)$ è la soluzione fondamentale relativa al tempo s cioè $\begin{cases} \partial_t \underline{X}(t,s) = A(t)X(t,s) \\ X(s,s) = I \end{cases}$

$$\phi(t; s, x_0) = \underline{X}(t,s)\, x_0.$$

Allora $x(t) := \underbrace{\phi(t; t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t; s, g(s))\, ds}$

è soluzione di (3)

$$x(t_0) = \phi(t_0; t_0, x_0) = x_0. \checkmark$$

$$\dot{x} = \partial_t \phi(t; t_0 x_0) + \phi(t; t, g(t)) + \int_{t_0}^{t} \underline{\partial_t \phi(t; s, g(s))}\, ds$$

$$= A\phi(t; t_0, x_0) + g(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{A(t)}\, \phi(t; s, g(s))\, ds$$

$$= \underline{A(t)\phi(t; t_0, x_0)} + g(t) + \underline{A(t) \int_{t_0}^{t} \phi(t; s, g(s))\, ds}$$

$$= A(t)\, x(t) + g(t). \checkmark$$

Oss. nel caso a coeff. costanti:

$$\boxed{\phi(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} x_0.}$$

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

$$\partial_t X(t; t_0) = A e^{A(t-t_0)}$$

$$X(t_0, t_0) = e^{A \cdot 0} = I.$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} g(s)\, ds$$

$$= e^{At}\left(e^{-At_0} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-As} \underline{g(s)}\, ds.\right)$$

Es. Trovare la soluzione generale di

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + e^t \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4x_2 - 2e^t \end{cases} \qquad g(s) = \begin{pmatrix} e^s \\ -2e^s \end{pmatrix}$$

Equa omogenea! $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \underline{3, 2}$$

$$e^{At}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad u_1 = 1, \; u_2 = -2$$

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 3u_1 \\ 2u_1 + 4u_2 = 3u_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2u_1 &= -u_2 \\ u_2 &= -2u_1 \end{aligned}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 - v_2 = 2v_1 \qquad v_1 = -v_2$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (2v_1 + 4v_2 = 2v_2, \; v_1 + v_2 = 0 \; \checkmark)$$

$$U = [u, v] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det U = 1,$$

$$[A\,u, A\,v] \quad [3u, 2v] = U\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$AU = [Au, Av] = \ldots$

$$U^{-1} e^{At} U = e^{U^{-1}AU\,t} = e^{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{e^{At}}} = U \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} U^{-1}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ -2e^{3t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{3t} + 2e^{2t} & -e^{3t} + e^{2t} \\ +2e^{3t} - 2e^{2t} & 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

<u>finire il calcolo</u>

(verifica $\dot{A} = e^{At} A$) ....