mercoledì 18 novembre 2020 16:17

$$(1)\begin{cases}\dot{x} = A(t)x & x \in C^1(I,\mathbb{R}^n), \quad A \in C(I, Mat_{\mathbb{R}}(n)) \\ x(t_0) = x_0 & x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \in I \quad I \text{ intervallo di } \mathbb{R}.\end{cases}$$

$\exists!$ sol. C^1 di (1) $\forall t \in I$

Oss. 1 Se $x_1, \dots, x_n$ sono n soluzioni di $\dot{x} = Ax$ e gli n vettori $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ sono indipendenti per un $t_0 \in I \Rightarrow x_1(t), \dots, x_n(t)$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^n$, $\forall t \in I$ (cioè sono indip. come funzioni su I)

Infatti, se $\exists \; t_1 \in I \mid x_1(t_1) \dots x_n(t_1)$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists \; (c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0) \mid$

$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_1) = 0$. Allora se

$x(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$, x è soluzione di

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax \\ x(t_1) = 0\end{cases} \Rightarrow \quad x(t) \equiv 0 \Rightarrow \sum c_i x_i(t) \equiv 0$$

$\Rightarrow$ contraddizione.

Conseguenza $W(t; x_1, \dots, x_n) := \det[x_1, \dots, x_n]$

(x_i sono soluz. di $\dot{x} = Ax$) $W(t) \neq 0 \;\; \forall t \in I$

$\Leftrightarrow W(t_0) \neq 0$ per un $t_0 \in I$.

Soluzione matriciale

$$\underline{\dot{X}} = A \underline{X} \qquad A \in C(I, Mat(n)) \quad Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$$

$$\underline{X} \in C^1(I, Mat(n))$$

$$\Updownarrow$$

$\dot{x}_i = A x_i \quad 1 \le i \le n$ dove $\underline{X} = [x_1, \dots, x_n]$

$$\Updownarrow$$

$\underline{X}_{ij} = x_{ji}$

i-ma componente del vettore $x_i \in \mathbb{R}^n$

$$(2)\begin{cases} \dot{\underline{X}} = A\underline{X} \\ \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0 \in \underline{Mat(n)}. \text{ assegnata.} \end{cases}$$

ha un'unica soluzione matriciale

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A x_i \\ x_i(t_0) = x_i^{(0)} \end{cases} \qquad \underline{X}_0 = [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}], \quad x_i^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\left(A\underline{X} = [Ax_1, \dots, Ax_n] \right)$$

__Def__. (a fundamental matrix solution)

__Una__ __soluzione__ __matriciale__ __fondamentale__ è una matrice $U(t)$ che risolve $\dot{U} = AU$ e, $\underline{\det U \neq 0}$

__Def__ (Principal matrix solution) la __soluzione__ __matriciale__ __principale__, è la soluzione di (2) con $\underline{X}_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativa a $t_0 \in I$

La soluzione matriciale principale $\Phi(t, t_0) \in Mat(n)$ t.c.

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\,\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = I \end{cases}$$

[illegible] $\dot{\Phi}(t, t_0) = \partial \Phi(t, t_0)$

con $\quad \Phi(t,s) = \partial_t \Phi(t,s)$

Proprietà della SMP :

(i) se $U(t)$ è una soluzione fondamentale di $\dot{x} = Ax$

$\Longrightarrow$ $\underline{x(t) = U(t)\, U(t_0)^{-1} x_0}$ è la soluzione di (4)

$\dot{x} = \dot{U}(t)\, U(t_0)^{-1} x_0 = A(t)\left(U(t)\, U(t_0)^{-1} x_0\right)$

$x(t_0) = x_0$. ✓

(ii) $U(t) = \Phi(t,s)\, U(s) \quad \forall\, t,s \in I$

se U è una soluz. fond. $\Longrightarrow$ $\boxed{\Phi(t,s) = U(t)\, U(s)^{-1}}$

Segue da unicità per R_1:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = \dot{\Phi}(t,s)\, U(s) = A\, \Phi(t,s)\, U(s) \\ U(s) = \Phi(s,s)\, U(s) \checkmark \end{cases}$$

ovvia $\Phi(t,s)\, U(s)$ è l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(s) = U(s) \end{cases}$$

$\left(X(t) := \Phi(t,s)\, U(s) \right) \quad \begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(s) = U(s) \end{cases}$

(iii) $\Phi(t,s) = U(t)\, U(s)^{-1}$

(iv) $\Phi(t,s)\, \Phi(s,\tau) = \Phi(t,\tau) \quad \forall\, t,s,\tau \in I$

Infatti sia $U(t)$ una qualunque soluzione fondamentale

$\Phi(t,s) = U(t)\, U(s)^{-1}$

$\Phi(t,s)\, \Phi(s,\tau) = U(t)\, \cancel{U(s)^{-1}}\, \cancel{U(s)}\, U(\tau)^{-1} =$

$$\Phi(t,s)\Phi(s,\tau) = U(t)U(s)^{-1}U(s)U(\tau)^{-1}$$
$$= U(t)\,U(\tau)^{-1} = \Phi(t,\tau).$$

(v) $\Phi(t,s)^{-1} = \Phi(s,t)$ (segue da (iii))

Teorema (Identità di Abel o formula di Liouville)

Il wronskiano di una soluzione fondamentale $U(t)$, cioè $w(t) = \det U(t)$, verifica
$$\dot w = (\operatorname{tr} A(t))\, w \iff w(t) = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds}.$$

Lemma $A \in \mathrm{Mat}(n)$ allora
$$\det\left(I + \varepsilon A + o(\varepsilon)\right) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon).$$
$$\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Dim. del Teorema

$$U(t,s) = \Phi(t,s)U(s)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{w(t+\varepsilon) - w(t)}{\varepsilon}$$

$$w(t+\varepsilon) = \det U(t+\varepsilon) = \det\left(\Phi(t+\varepsilon, t)U(t)\right)$$
$$= \underbrace{\det U(t)}_{w(t)} \cdot \underline{\det \Phi(t+\varepsilon,t)}$$

$$\dot\Phi(t,s) = A(t)\Phi(t,s), \quad s = t$$

$$\Phi(t+\varepsilon,t) = \Phi(t,t) + \varepsilon\, \dot\Phi(t,t) + o(\varepsilon)$$
$$= I + \varepsilon A(t) + o(\varepsilon)$$

$$w(t+\varepsilon) = w(t)\left(1 + \varepsilon \operatorname{tr} A(t) + o(\varepsilon)\right)$$

$$\underbrace{\frac{w(t+\varepsilon) - w(t)}{\varepsilon}}_{\dot w(t)} = w(t)A(t) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \longrightarrow w(t) \operatorname{tr} A(t).$$
$$\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0.$$

Dim. del lemma

Dim. del teorema

$$B = \underline{\underline{I}} + \varepsilon \underline{A} + \underline{\underline{o(\varepsilon)}} \qquad B = (b_{ij})$$

$$\det B := \sum_{\sigma \in \Pi_n} \varepsilon_\sigma \, b_{1\sigma_1} \cdots b_{n\sigma_n} , \qquad \varepsilon_\sigma = \text{segno}(\sigma).$$

$$= \underbrace{b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}}_{\sigma = id} + \underbrace{\sum_{\sigma \neq id} \varepsilon_\sigma \, b_{1\sigma_1} \cdots b_{n\sigma_n}}$$

se $\sigma \neq id \quad b_{1\sigma_1} \cdots b_{n\sigma_n} = O(\varepsilon^2) = o(\varepsilon)$

$\Downarrow$

$\exists \; i \quad \sigma_i \neq i \quad \Rightarrow \exists \; j \neq i \; / \; \sigma_j \neq j$

$\rightarrow \; b_{i\sigma_i} = O(\varepsilon) = \varepsilon \underline{A_{i\sigma_i}} + o(\varepsilon)$
$\sigma_i \neq i \qquad \delta_{i\sigma_i} = 0.$

$\rightarrow \; b_{j\sigma_j} = \varepsilon \underline{A_{j\sigma_j}} + o(\varepsilon)$
$\sigma_j \neq j$

$$\varepsilon_\sigma \, b_{1\sigma_1} \cdots b_{n\sigma_n} = O(\varepsilon^2)$$

$$\det B = \underline{b_{11}} \cdots b_{nn} + O(\varepsilon^2)$$

$$= (1 + \varepsilon A_{11} + o(\varepsilon)) \cdots (1 + \varepsilon \underline{A_{nn}} + o(\varepsilon)) + O(\varepsilon^2)$$

$$= 1 + \varepsilon (A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn}) + \underline{o(\varepsilon)}$$

$$= 1 + \varepsilon \, \mathrm{tr} A + o(\varepsilon). \quad \boxtimes$$

Sistemi a coefficienti costanti (sistema autonomo)

$$(4) \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \underline{x(t) = e^{At}} x_0 \quad \text{è la soluzione di (4).}$$

$$e^{At} = \sum^{\infty} \frac{t^k A^k}{\cdots}$$

$k=0 \quad k!$

Se $\underline{A \text{ è diagonalizzabile}}$: $\exists\ U$, $\det U \neq 0$.

t.c. $\quad U A U^{-1} = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$e^{At} = e^{t U^{-1} \Lambda U} = U^{-1} e^{t\Lambda} U$$

$$e^{t\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\Lambda)^k}{k!} \quad , \quad \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} x_0 = U^{-1} e^{\Lambda t} \underline{U x_0}.$$

$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad e^{\lambda_i t}$

$\underline{\underline{\lambda_i \in \mathbb{C}}}$

$e^{\operatorname{Re}\lambda_i t} \left(\cos(\operatorname{Im}\lambda_i)t + i \sin(\operatorname{Im}\lambda_i)t\right)$

Oss. A è diag. $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\underline{\underline{n \text{ autovettori indip.}}}$

$\Updownarrow$

$$U^{-1} A U = \Lambda$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\displaystyle [Au_1, \dots, Au_n]}{\underset{\|}{AU}} = U\Lambda = [\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n]$$

$$U = [u_1, \dots, u_n]$$

$$\Updownarrow$$

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili ad esempio

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diag.

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (una matrice si dice nilpotente se $\exists k \mid N^k = 0$)

$\lambda = 0$ molt. alg. 2.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}} \Rightarrow$ ho autovettori $\nexists$ 2.

$x = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$

---

n soluzioni indip di $\dot{x} = Ax$ nel caso in cui A non è diagonalizzabile.

(se $\lambda \neq \mu$ e $Au = \lambda u$, $Av = \mu v \Rightarrow$ u e v sono indip.

Caso in cui ho un autovalore di molt. alg. k

$(\quad)^k \, Q(\lambda), \quad Q(\lambda) \neq 0.$

$P_A(z) = (z-\lambda)\, q(z)$, ...

e molt. geometrica 1 (c'è un solo autovettore con autovalore λ).

1. $v_1 \neq 0$: $\quad A v_1 = \lambda v_1$

2. v_2: $\quad (A-\lambda I) v_2 = v_1$

$\vdots$

k. v_k: $\quad (A-\lambda I) v_k = v_{k-1}$

Allora $\quad x_1 = e^{\lambda t} v_1$, $\quad x_2 = (v_2 + t v_1) e^{\lambda t}, \ldots,$

$$x_k = \Big(\underbrace{v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2!} v_{k-2}} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1\Big) e^{\lambda t}$$

sono soluzioni indipendenti (facile!) di

$$\dot x = A x$$

$$(A-\lambda I) v_k = v_{k-1}$$
$$(A-\lambda I)^2 v_k = (A-\lambda I) v_{k-1} = v_{k-2}$$
$$(A-\lambda I)^{k-1} v_k = v_1$$
$$(A-\lambda I)^k = (A-\lambda I) v_1 = 0.$$

$A-\lambda I$ è una matrice nilpotente di ordine k.

$x_1 = e^{\lambda t} v_1 \qquad \dot x_1 = \lambda e^{\lambda t} v_1 = e^{\lambda t} \underbrace{\lambda v_1} = e^{\lambda t} A v_1$

$= A(e^{\lambda t} v_1) = A x_1.$

$x_2 = (v_2 + t v_1) e^{\lambda t}.$

$\ldots e^{\lambda t} \quad (v_2 + t v_1) \lambda e^{\lambda t}$

$$\dot{x}_2 = v_1 e^{\lambda t} + (v_2 + t v_1)\lambda e^{\lambda t}$$

$$= v_1 e^{\lambda t} + \underline{v_2 \lambda} e^{\lambda t} + t \underbrace{\lambda v_1}_{= A v_1} e^{\lambda t}$$

$$(A - \lambda I) v_2 = v_1 \iff A v_2 = \lambda v_2 + v_1 \qquad \underline{\lambda v_2} = A v_2 - v_1$$

$$= \cancel{v_1 e^{\lambda t}} + (A v_2 - \cancel{v_1}) e^{\lambda t} + t A v_1 e^{\lambda t}$$

$$= A (v_2 + t v_1) e^{\lambda t} = A x_2 . \checkmark$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\underline{x_1 = x_2^0 t + x_1^0} \\ &\underline{x_2 = x_2^0} \end{aligned} \leftarrow$$

$\lambda = 0$ è autoval. con $m_a(\lambda) = 2$

$$A v_1 = 0 \qquad A \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} v_{22} &= 0 \\ v_{11} &= 1. \end{aligned}$$

$$v_1 = (1, 0)$$

$$A v_2 = v_1 \qquad \begin{pmatrix} v_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\, x_1 = \underline{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}$$
