"Quasi" differenziale esatte

lunedì 19 ottobre 2020 16:12

Esempi collegati alla teoria delle 1-forme differenziali.

Trovare curve su cui una 1-forma differenziale si annulla

(1) $\omega^1 = X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$

equivale a risolvere equazioni differenziali del primo ordine.

In generale X, Y sono $C^k(A,\mathbb{R})$, $(k \geq 0)$,

A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$.

All'equazione (1) si associano le ED.

(2) $Y(x,y)\dfrac{dy}{dx} + X(x,y) = 0$

oppure

(3) $X(x,y)\dfrac{dx}{dy} + Y(x,y) = 0$.

Queste equaz. diff.li non sono in forma normale (lo saranno se, nella (2), $Y(x_0,y_0) \neq 0$ e nella (3) se $X(x_0,y_0) \neq 0$)

L'equazione (1) si dice esatta se ω^1 è esatta

$\Longleftrightarrow \exists\ F \in C^1(A,\mathbb{R}) \mid F_x = X,\ F_y = Y$

$\Longleftrightarrow \omega^1 = dF$

$dF = 0$ su $\{F = c\}$.

Lemma Supponiamo che $S = \{F = c\}$ con $F \in C^1(A)$ sia una curva regolare (vero se $\underline{\nabla F \neq 0}$ su S),

In un intorno di (x_0,y_0) t.c. $F(x_0,y_0) = c$ e $F_y(x_0,y_0) \neq 0 \overset{\text{TFI}}{\Longrightarrow} \exists!\ y = y(x) \in C^1((x_0-\delta, x_0+\delta))$ per un qualche $\delta > 0$ $\underleftarrow{\text{ed inoltre}}$ y è soluzione di (2) $\forall\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

in fatti $x, y(x)$ soddisfa il dato iniziale $y(x_0)=y_0$.
Analogo risultato (scambiando x e y) se $F_x(x_0,y_0)\neq 0$.

Dim. Sia $g(x)=y(x)$ la funzione che verifica

$$F(x,g(x))=c \quad \forall \quad x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Derivando otteniamo

$$F_x(x,g(x))+F_y(x,g(x))\,g'(x)=0.$$

$$X(x,g(x))+Y(x,g(x))\,g'(x)=0. \quad \boxtimes$$

Richiamo sulle 1-forme su $\mathbb{R}^2$.

- $\omega^1 = X\,dx + Y\,dy$ su A ap. connesso di $\mathbb{R}^2$ si dice *esatta* se $\exists\, F\in C^1(A,\mathbb{R})$ t.c.

$$dF=\omega^1 \iff \nabla F=(X,Y).$$

- $\omega^1 = X\,dx + Y\,dy$ ($\in C^1$) si dice *chiusa* se

$$X_y = Y_x$$

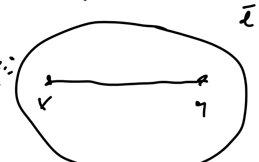
$$(d\omega^1=0)$$

Oss. ω^1 è esatta su A $\Rightarrow$ ω^1 è chiusa su A

(Schwarz: $\omega^1= dF = F_x\,dx+F_y\,dy$
$X_y=Y_x \iff (F_x)_y=(F_y)_x$)

- $\boxed{\text{Lemma di Poincaré: se } A \text{ è convesso, stellato o semplicemente connesso e } \omega^1 \text{ è chiusa su } A \Rightarrow \omega^1 \text{ è esatta su } A.}$

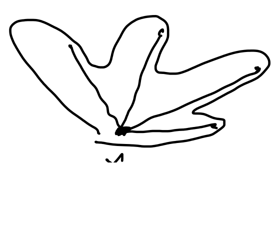
convesso:



$\sigma(x,y)\subseteq A \quad \forall\, x,y\in A$

$\sigma(x,y)=\{x+t(y-x) \mid 0\le t\le 1\}$

stellato: $\exists\, x_0\in A$ t.c. $\forall\, x\in A$ $\sigma(x_0,x)\subseteq A$



semplicemente connesso

$\{0 < x^2+y^2 < 1\}$
non è semplicemente connesso.

<u>Oss.</u> Se ω^1 è esatta una primitiva (ossia una funzione F : $dF = \omega^1$) è data

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega^1 = F(x,y) - F(x_0,y_0)$$

<u>non</u> dipende dalla particolare curva scelta.

[Se ω^1 è una 1-forma e Γ è una curva regolare orientata $\Gamma = \{ \underline{z}(t) = (x(t), y(t)) \mid 0 \le t \le 1 \}$

$Or(\Gamma)$ = l'orientamento indotto dal cammino $z(t)$ e z è derivabile su $[0,1]$ e $z'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in [0,1]$.
$(x'(t), y'(t))$

$$\int_\Gamma \omega^1 := \int_0^1 \Big(X(z(t))\,\dot x + Y(z(t))\,\dot y \Big)\, dt.$$

$$\longrightarrow \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega^1 = \int_\Gamma \omega^1$$ dove Γ ha estremi (x_0,y_0) e (x,y) (ordinati).

(<u>Es.</u> $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dF = F(x,y) - F(x_0,y_0)$).

<u>ESERCIZI</u> da [AA] § 5.6 $\qquad X(x)dx + Y(y)dy = 0.$

<u>Es. 1</u> Trovare la soluzione di $\cos x\, dx + e^y dy = 0$ (*) passante per $(0,0)$ risolvendola come un'equazione esatta.

N.B. (4) è equivalente all'ED.

$$(5)\ \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + e^{-y}\cos x = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

È chiaro che $F(x,y) = \int^x \cos t + \int^y e^t + c$

Una primitiva di (4) è

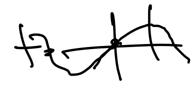
$F_c(x,y) = \sin x + e^y + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

$F_c(x,y) = 0$ $\qquad$ $F_c(0,0) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 + c = 0 \iff c = -1$

$\{\sin x + e^y = 1\} = S.$



$e^y = 1 - \sin x \qquad \underline{y = \log(1 - \sin x)}, \quad x \in \underline{\left(-\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{\pi}{2}\right)}$

è l'unica soluzione di (5).

<u>ES.2.</u> Risolvere $(4x^3 + 6x^5)\,dx - 2y\,dy = 0$ e trovare a t.c. ci sia un'unica soluzione passante per $(0,a)$.

$F_c(x,y) = x^4 + x^6 - y^2 + c$, $\quad \underline{F_c = 0}$.

$F_c(0,a) = -a^2 + c = 0 \qquad c = a^2$

$F(x,y) := x^4 + x^6 - y^2 + a^2$

$F(x,y) = 0.$

$y^2 = x^4 + x^6 + a^2$

$y = (\operatorname{sgn} a)\sqrt{x^4 + x^6 + a^2} \qquad$ se $a \neq 0$

$$\left| \; y(0) = a \right.$$

$$y = \sqrt{x^4 + x^6 + a^2} \quad \text{se } a > 0$$

$$y = -\sqrt{x^4 + x^6 + a^2} \quad \text{se } a < 0.$$

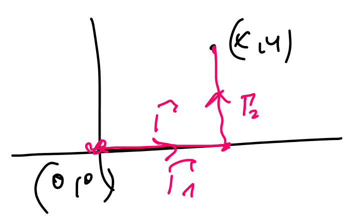
Se $a = 0$. si hanno due soluzioni

$$y = \pm \sqrt{x^4 + x^6} \quad \text{sono entrambe soluzioni.}$$

Es. 5 Risolvere

$$\omega = (\underbrace{2x+y}_{X})\,dx + (\underbrace{x+2y}_{Y})\,dy = 0.$$

$$X_y = 1 = Y_x = 1.$$



$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$$

$$= \int_{\Gamma_1} (2x+y)\,dx + \int_{\Gamma_2} (x+2y)\,dy$$

$$= \int_0^x 2t\,dt + \int_0^y (x + 2t)\,dt$$

$$\left(\Gamma_1 = \{ (t,0) \mid \underbrace{0 \le t \le x}_{x \ge 0} \}, \quad \Gamma_2 = \{ (x,t),\ \underbrace{0 \le t \le y}_{\ge 0} \} \right)$$

$$= \underline{x^2 + xy + y^2}$$

$F_c = x^2 + xy + y^2 + c$ ...

ES. 18 Risolvere $y\,dx - 3x\,dy = 0$

$$X_y = 1 \neq Y_x = -3$$

non è esatta (su $\mathbb{R}^2$).

Usiamo il metodo del "fattore integrante"

$$\underbrace{\alpha(x)\,y}_{X}\,dx - \underbrace{3\,\alpha(x)\,x}_{Y}\,dy = 0$$

con $\alpha(x) \neq 0$.

$$X_y = \alpha(x) = -3\alpha' \cdot x - 3\alpha$$

$$4\alpha + 3\alpha' x = 0 \qquad \underbrace{\frac{\alpha'}{\alpha}}_{(\log\alpha)'} = -\frac{4}{3}\frac{1}{x}$$

$$\log\alpha = -\frac{4}{3}\log x\,, \qquad \alpha = x^{-4/3}$$

$$\omega' = \frac{y}{x^{4/3}}\,dx - \frac{3}{x^{1/3}}\,dy$$

$$F = -\frac{3}{x^{1/3}}\cdot y \qquad F_y = -\frac{3}{x^{1/3}}$$

$$F_x = \cancel{-3}y\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right)x^{-4/3} = \frac{y}{x^{4/3}}\,. \quad ✓$$

$$\frac{3}{x^{1/3}}\,y - c = 0. \qquad y = c\,x^{1/3}$$

ES. 17 [AMS] Risolvere e discutere (intervalli max di $\exists$ e limiti)

$\dot{x} = |x - t|$

(7) $\begin{cases} \dots \\ x(0) = a \end{cases}$ (al variare di $a \in \mathbb{R}$).

Suggerimento: $\underline{y(t)} := x(t) - t$

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x} - 1 = |x - t| - 1 = |y| - 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

$$\boxed{(8) \begin{cases} \dot{y} = |y| - 1 \\ y(0) = a. \end{cases}}$$

Se $y_a(t)$ è l'unica soluzione di (8) $\Rightarrow$ $x_a(t) := y_a(t) + t$ verifica (7) $\Rightarrow$ è l'unica soluzione di (7).

$$(9) \begin{cases} \dot{y}(t) = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (10) \begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t; y_0, t_0) \qquad \bar{y}(t; y_0)$$

$$y(t; y_0, t_0) = \bar{y}(t - t_0; y_0).$$