venerdì 2 ottobre 2020 16:14

(1) $\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$

le soluzioni di (1) sono uniche.

Dobbiamo discutere l'esistenza.

Introduciamo il seguente operatore differenziale che agisce sulle funzioni $C^2(I)$, I int. che contiene 0

$$Lx : \ddot{x} + a\dot{x} + bx \qquad L = D^2 + aD + b. \quad D = \frac{d}{dt}$$

È utile introdurre soluzioni complesse di (1) ovvero soluzioni: $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$\dot{z}(t) := \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$

Os. $t \to e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$

Due definizioni: (a) formula di Eulero $\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

(b) $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $z \in \mathbb{C}$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

- $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico completo rispetto alla distanza

$d(z, w) := |z - w|$, $|z| := \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$ $\quad z = (x,y) =: x + iy$

$((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ è uno sp. metrico completo$)$.

Conv. di succ., continuità, etc. in modo standard

$z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} z_0 \iff |z_k - z_0| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \iff \begin{cases} x_k \to x_0 \\ y_k \to y_0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} z_k = x_k + i y_k \\ z_0 = x_0 + i y_0 \end{pmatrix}$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ conv. ass. $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{k=0} \left|\frac{z^k}{k!}\right| = \sum_{k=0} \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{|z|}$$

- <u>FORMULA DI EULERO</u>: $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$e^{i\alpha} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\alpha^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\alpha^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$=: \cos\alpha + i \sin\alpha. \ \blacksquare$$

$$i^{2j} = (i^2)^j = (-1)^j$$
$$i^{2j+1} = i(-1)^j$$

- $$D_t\, e^{tz} := \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)z} - e^{tz}}{h}, \quad (h, t \in \mathbb{R})$$

<u>Oss.</u> $\exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ Verifico il teorema di addizione

(2) $\quad \underline{\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)}$

Dim. di (2):

$$\exp(z+w) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^j w^{k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \overset{\downarrow}{=} \sum_{\substack{(k,j)\in\mathbb{N}_0 \\ 0\le j\le k}} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!}$$

$\{0, 1, 2, \dots\}$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \underline{\sum_{k=j}^{\infty} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ h=k-j}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z^j}{j!} \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{w^h}{h!}}_{} \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{w^h}{h!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$

$$= \exp(w)\cdot \exp(z) \cdot$$ ∎

$$\frac{e^{(t+h)z}-e^{tz}}{h} = \frac{e^{tz}e^{hz}-e^{tz}}{h} = e^{tz}\boxed{\frac{e^{hz}-1}{h}}$$

$$\frac{e^{hz}-1}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(hz)^k}{k!}-1}{h} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(hz)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{k-1}z^k}{k!}$$

$$= z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(hz)^{k-1}}{k!} = z\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(hz)^{k-1}}{k!}\right)$$

$$= z\left(1+h\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-2}z^{k-1}}{k!}}_{\varphi(h,z)}\right)$$

$$|\varphi(h,z)| \le \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|h|^{k-2}|z|^{k-1}}{k!} \underset{|h|\le 1}{\le} \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|z|^{k-1}}{k!} = M(z) \ge 0.$$

$$\lim_{h\to 0} h\,\varphi(h,z) = 0.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{hz}-1}{h} = z \Rightarrow \boxed{D_t e^{tz} = z e^{tz}}$$

Cerchiamo soluzioni della forma $x = e^{\lambda t}$ di $\boxed{\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0}$ (3)

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}P(\lambda), \quad P(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$$

(polinomio caratteristico di L)

$e^z \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}.$

[Dim. $e^z = 0$, $z = x+iy$

$$e^z = e^{x+iy} = \underset{>0}{e^x}\, e^{iy} = e^x(\underbrace{\cos y + i\sin y}_{\cos^2 y+\sin^2 y = 1}) \neq 0, \ \forall x,y. \ ]$$

$e^{\lambda t}$ è sol. di (3) $\iff P(\lambda)=0$

$\iff \quad \lambda_\pm = \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, $\quad \Delta := a^2-4b \in \mathbb{R}$

se $\quad a^2-4b>0$, $\quad \sqrt{\Delta}>0$

se $\quad a^2-4b<0$, $\quad \lambda_\pm = \dfrac{-a \pm i\sqrt{4b-a^2}}{2}$, $\quad \lambda_+ = \overline{\lambda_-}$, $\operatorname{Im}\lambda_\pm \neq 0$.

se $\quad a^2-4b=0$, $\quad \lambda_\pm = \lambda_0 = -\dfrac{a}{2}$

$(P(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^2)$

Nel caso $\Delta>0$. $\quad x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}$, $\quad A_\pm \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 &= A_+ + A_- \\ \dot{x}(0) = v_0 &= A_+\lambda_+ + A_-\lambda_- \end{aligned} \underset{(\text{Es.})}{\iff} \begin{cases} A_+ = \dfrac{v_0 - \lambda_- x_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \\ A_- = \dfrac{\lambda_+ x_0 - v_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \end{cases}$$

Caso $\Delta<0$

$$x(t) = \overline{x(t)} \iff \begin{cases} A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} = \\ \overline{A_+}\, e^{\overline{\lambda_+} t} + \overline{A_-}\, e^{\overline{\lambda_-} t} \end{cases}$$

$$= \overline{A_+}\, e^{\lambda_- t} + \overline{A_-}\, e^{\lambda_+ t}$$

$\overline{\lambda_+} = \lambda_-$

$$\iff \overline{A_+} = A_-$$

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + \overline{(A_+ e^{\lambda_+ t})} = 2\,\mathrm{Re}\,(A_+ e^{\lambda_+ t})$$

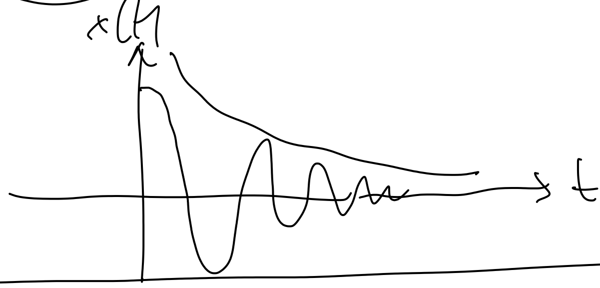
Se $\alpha := -\dfrac{a}{2}$, $\quad \omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} > 0$

segue che la sol. di (1) è data da

(Es.) $\quad x(t) = x_0 e^{\alpha t} \cos\omega t + (v_0 - \alpha x_0)\, e^{\alpha t} \operatorname{sen}\omega t$

$(A_+ = A + iB,\ A, B \in \mathbb{R})$ Se $\alpha = 0 \iff a = 0 \iff \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Se $a > 0$, $b > 0$. $\ddot{x} + \underset{\text{attrito}}{a\dot{x}} + bx = 0$. oscillatore armonico smorzato



$\Delta = 0$.

$x = e^{\lambda t}$

$$0 = Lx = P(\lambda)e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_0)^2 e^{\lambda t}$$

se $\lambda = \lambda_0$ $e^{\lambda_0 t}$ è soluzione $\lambda_0 = -\frac{a}{2}$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \frac{a^2}{4}x = 0. \qquad a^2 = 4b,\ b = \frac{a^2}{4}$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{a}{2}t}.$$

$$D_\lambda\left((\lambda - \lambda_0)^2 e^{\lambda t}\right) = 2(\lambda - \lambda_0)e^{\lambda t} + (\lambda - \lambda_0)^2 t e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = \lambda_0} = 0.$$

$$\underbrace{L\left(D_\lambda(e^{\lambda t})\right)}_{=0}\Big|_{\lambda = \lambda_0} = L(te^{\lambda_0 t}) = 0 \implies te^{\lambda_0 t} \text{ è soluzione}$$

$$Ae^{\lambda_0 t} + Bte^{\lambda_0 t}$$ "termine secolare".

Es. la sol. di (1) con $\Delta = 0$ è data da:

$$x(t) = \left(x_0 + (v_0 - \alpha x_0)t\right)e^{\alpha t}, \quad \alpha = -\frac{a}{2}.$$

Def. $z \mapsto f(z)$ $\quad z \in \mathbb{C}$, $f(z) \in \mathbb{C}$.

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Se $\exists\ f'(z_0)$, $\forall z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$ (aperto), si dice che f è analitica o olomorfa in Ω.

f, g sono analitiche $\Rightarrow (fg)' = f'g + fg'$.

(MIRACOLO: f è deriv. in $\Omega \Rightarrow$ è derivabile ∞ volte !!).