lunedì 2 novembre 2020 16:17

$L[x] := \ddot{x} + p_1 \dot{x} + p_0 x = 0$ , $p_i \in C(I)$

$(I = \mathbb{R})$

$L[x] = 0$

$Ker(L) =$ spazio vettoriale di dim. 2.

$= \langle x_1, x_2 \rangle =$ Span $\{x_1, x_2\}$

$= \{ a x_1 + b x_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

con $x_1$ e $x_2$ lin indip

$\Leftrightarrow$ $W(x_1, x_2; t_0) \neq 0$ per un $t_0 \in I$

$\Leftrightarrow$ $W(x_1, x_2; t) \neq 0$ $\forall t \in I$.

---

Eq-ne del 2° ordine lin. non omogenea

$$(PC) \begin{cases} L[x] = h \quad , \quad h \in C(I). \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Metodo di <u>VARIAZIONE DEI PARAMETRI</u>.

Assumiamo di conoscere una soluzione fondamentale di $L[x]=0$. cioè di conoscere due soluzioni $x_1$ e $x_2$ indip di $L[x]=0$.

Cerchiamo una soluzione di

(1) $L[x] = h$

della forma $\underline{\xi(t) = c_1(t)\, x_1 + c_2(t)\, x_2}$ con $c_i \in C^2(I)$.

<u>N.B.</u> Se $\xi(t)$ è una <u>soluzione particolare</u> di (1)

Allora $a x_1 + b x_2 + \xi$ è la <u>soluzione generale</u> di (1).

<u>con $a, b \in \mathbb{R}$.</u> $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ ogni soluzione di PC()

è della forma $x(t) = a x_1 + b x_2 + \xi$

<u>Infatti</u>: $L[\underline{a x_1 + b x_2 + \xi}] =$

$$a \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L[x_1]}} + b \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L[x_2]}} + L(\xi) = h$$

cioè $L[x(t)] = h$

e $x(t_0) = a x_1(t_0) + b x_2(t_0) + \xi(t_0) \overset{?}{=} x_0$

$\dot{x}(t) = a \dot{x}_1(t_0) + b \dot{x}_2(t_0) + \dot{\xi}(t_0) = y_0$

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - \xi(t_0) \\ y_0 - \dot{\xi}(t_0) \end{pmatrix}$$

$$\underline{W(x_1, x_2; t_0)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$W_0$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = W_0^{-1} \begin{pmatrix} x_0 - \xi(t_0) \\ y_0 - \dot{\xi}(t_0) \end{pmatrix}.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\boxed{\xi(t) = c_1(t)\, x_1(t) + c_2(t)\, x_2(t).} \quad \underline{\underline{\text{con}}} \quad \underline{\dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0} \\ &\dot{\xi} = \dot{c}_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_2 \dot{x}_2 \\ &\ddot{\xi} = \ddot{c}_1 x_1 + 2\dot{c}_1 \dot{x}_1 + c_1 \underline{\ddot{x}_1} + \ddot{c}_2 x_2 + 2\dot{c}_2 \dot{x}_2 + c_2 \underline{\underline{\ddot{x}_2}} \end{aligned} \right.$$

$$0 = L[x_i] = \ddot{x}_i + p_1\dot{x}_i + p_0 x_i \,, \quad \boxed{\ddot{x}_i = -p_1\dot{x}_i - p_0 x_i} \quad (2)$$

$$L[\xi] = \ddot{\xi} + p_1\dot{\xi} + p_0\xi$$

$$= \ddot{c}_1 x_1 + 2\dot{c}_1\dot{x}_1 + \underline{\underline{c_1\ddot{x}_1}} + \ddot{c}_2 x_2 + 2\dot{c}_2\dot{x}_2 + \underline{c_2\ddot{x}_2}$$

$$+ p_1\left(\dot{c}_1 x_1 + c_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2 x_2 + c_2\dot{x}_2\right)$$

$$+ p_0\left(c_1 x_1 + c_2 x_2\right)$$

$$\overset{(2)}{=} \ddot{c}_1 x_1 + 2\dot{c}_1\dot{x}_1 + c_1\left(\cancel{-p_1\dot{x}_1} \cancel{- p_0 x_1}\right) +$$

$$\ddot{c}_2 x_2 + 2\dot{c}_2\dot{x}_2 + c_2\left(\cancel{-p_1\dot{x}_2} \cancel{- p_0 x_2}\right)$$

$$+ p_1\left(\dot{c}_1 x_1 + \cancel{c_1\dot{x}_1} + \dot{c}_2 x_2 + \cancel{c_2\dot{x}_2}\right)$$

$$+ p_0\left(\cancel{c_1 x_1} + \cancel{c_2 x_2}\right)$$

$$= \left(\ddot{c}_1 + \cancel{\dot{c}_1 p_1}\right)x_1 + \left(\ddot{c}_2 + \cancel{\dot{c}_2 p_1}\right)x_2$$

$$+ 2\left(\dot{c}_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2\right) = h$$

Odtud

$$\begin{cases} \underline{\ddot{c}_1 x_1 + \ddot{c}_2 x_2} + 2\left(\dot{c}_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2\right) = h \\ \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0 \quad \Leftarrow \quad \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{c}_1 x_1 + \dot{c}_1\dot{x}_1 + \ddot{c}_2 x_2 + \dot{c}_2\dot{x}_2 = 0$$

$$(3) \qquad \boxed{\begin{cases} \dot{c}_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2 = h \\ \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = 0. \end{cases}}$$

Abbiamo ... $\xi = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2$

Lemma (3) è soddisfatta $\iff \begin{cases} L[\xi] = h, \\ \dot c_1 x_1 + \dot c_2 x_2 = 0 \end{cases}$

$$(3) \iff \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot x_1 & \dot x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot c_1 \\ \dot c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$\iff W \begin{pmatrix} \dot c_1 \\ \dot c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad W := W(x_1, x_2; t)$$

Ricordiamo il teorema di Abel, $w := \det W$

$$\to \dot w + p_1 w = 0$$

$$\to w(t) = c\, e^{-\int^t p_1}$$

$$W^{-1} = c' e^{\int^t p_1} \begin{pmatrix} \dot x_2 & -x_2 \\ -\dot x_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = c'' e^{\int^t p_1} \begin{pmatrix} -x_2 h \\ x_1 h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot c_1 \\ \dot c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot c_1 = -\dfrac{x_2 h}{w}. \\[2mm] \dot c_2 = \dfrac{x_1 h}{w}. \end{cases} \qquad w \neq 0.$$

$$(4) \begin{cases} c_1 = -\displaystyle\int^t \frac{x_2 h}{w} \\[2mm] c_2 = \displaystyle\int^t \frac{x_1 h}{w} \end{cases}$$

**Prop.** (VARIAZIONE DELLE COSTANTI)
Siano $p_1, p_0, h \in C(I)$, $L := D^2 + p_1 D + p_0$.
Siano $x_1$ e $x_2$ una soluzione fondam. di $L[x] = 0$.
Allora, se $c_1$ e $c_2$ sono definite in (4)
($w(t) = \det W$ wronskiano di $x_1$ e $x_2$) allora
$\xi(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ è f.c.

$\xi(t) := \dots$

$L[\xi] = h.$

($\det\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot x_1 & \dot x_2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Matrice fondamentale} \\ \text{o matrice Wronskiana}}} =: w(t) = \underline{\text{Wronskiano}}$ (*))

---

Esempio Trovare una soluzione particolare di

$$\ddot x - x = \underbrace{e^t \frac{2t-1}{t^2}}_{h(t)}, \quad t \neq 0$$

$L[x] = 0. \quad e^{\lambda t}, \quad P_\lambda = \lambda^2 - 1 \quad \lambda = \pm 1.$

$x = e^{\pm t}, \quad \underline{x_1 = e^t}, \quad \underline{x_2 = e^{-t}}$

$w = \det\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} = -2 \qquad (p_1 = 0.)$

$c_1 = \frac{1}{2}\int^t \frac{2s-1}{s^2} = \quad \int \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{s^2} = \underbrace{\log|t| + \frac{1}{2t}}_{c_1}$

$c_2 = -\frac{1}{2}\int^t e^{2s}\underbrace{\frac{2s-1}{s^2}} = \dots\dots$

$\xi = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

---

Caso $\quad a\dot x + bx = h \qquad a, b, h \in \mathbb{C}$

$\dot x + p_0 x = g$

$(e^P x)^\cdot = e^P g \qquad P = \int^t p_0$

$$e^{P} x = \int e^{P(s)} g(s)\, ds + c$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-P(t)}}_{x(t)} \underbrace{\int^t e^{P(s)} g(s)\, ds}_{c(t)} + \underbrace{c\, e^{-P(t)}}_{x(t)} .$$

$$\dot{x} + p x = 0.$$

---

**Es.** Mostrare che $p \neq q \Rightarrow t^p, t^q$ sono lin. indip.

$$a t^p + b t^q = 0 \quad , \quad p > q$$

$$a t^{p-q} + b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$a t^p = 0. \Rightarrow a = 0.$$

---