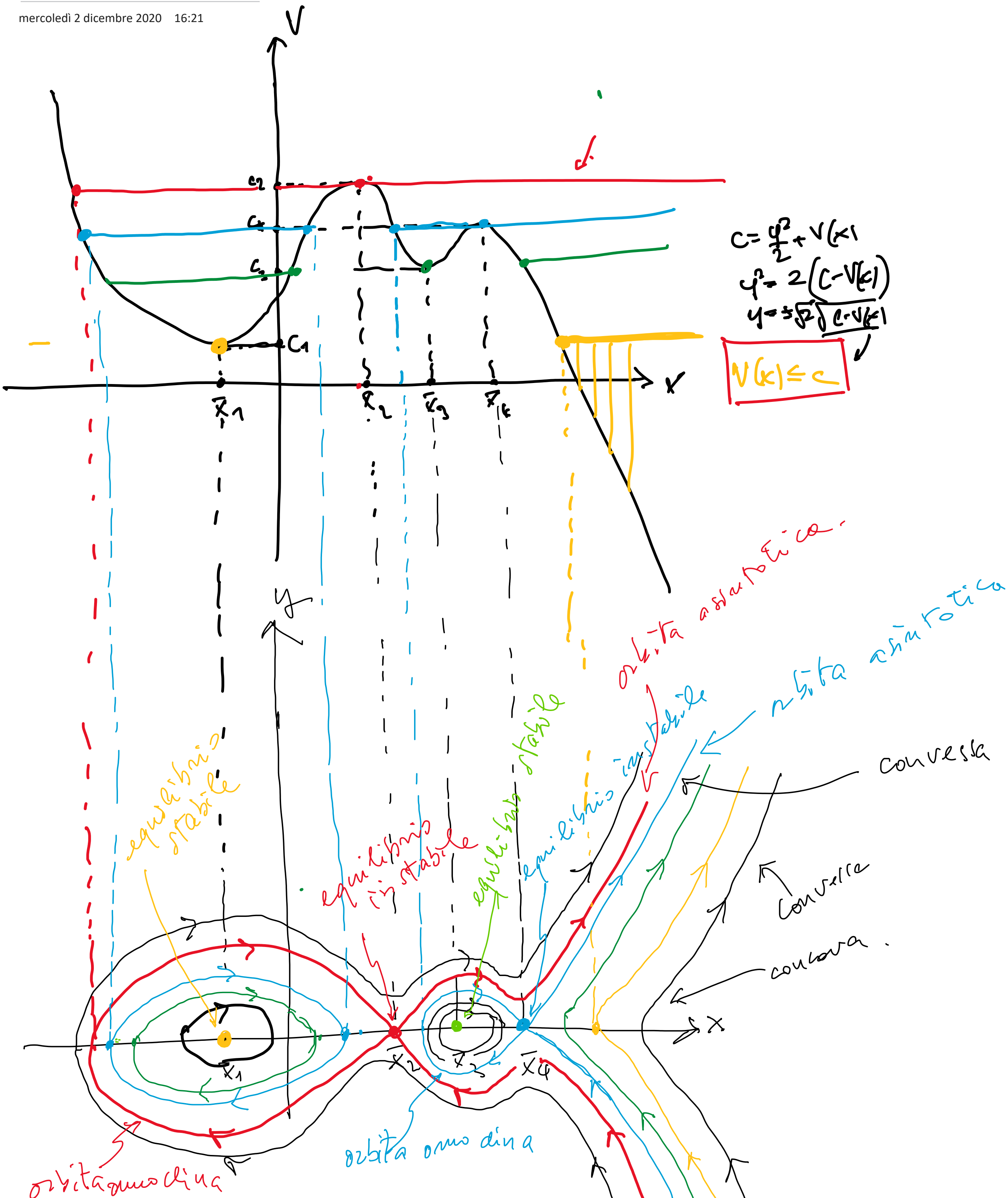
mercoledì 2 dicembre 2020 16:21



$V'(x) = 0 \iff x = \bar{x}_k,\ 1 \le k \le 4.$

$\iff (\bar{x}_k, 0)$ è un pto di equilibrio

((x_0,y_0) è un p.to d'equilibrio per $\frac{y^2}{2}+V(x)$

$\iff$ $y_0=0$ e $V'(x_0)=0$.)

$$E(\bar{x}_k,0) = V(\bar{x}_k) =: c_k.$$

$\mathcal{E}_{c_2} = \Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2 \dot\cup \Gamma_3 \dot\cup \Gamma_4$ con $\Gamma_i = \{ x^{(i)}(t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ — soluzioni

$x^{(1)}(t)$ orbita omoclina

$x^{(1)}(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \bar{x}_2$

$x^{(2)}(t) \equiv \bar{x}_2$ equilibrio

$x^{3}(t)$ orbita "asintotica" $\begin{cases} \lim_{t\to-\infty} x^{(3)}(t) = \bar{x}_2 \\ \lim_{t\to+\infty} x^{(3)}(t) = +\infty \end{cases}$

$x^{(4)}(t)$ orbita "asintotica" $\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} x^{(4)}(t) = \bar{x}_2 \\ \lim_{t\to-\infty} x^{(4)}(t) = +\infty \end{cases}$

$$y_\pm = \pm\sqrt{2(c_2 - V(x))} \qquad c_2 = V(\bar{x}_2)$$

$$y'(x) = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{c_2-V(x)}}\,(-V'(x))$$

$$c_2 - V(x) = \cancel{c_2} - \Big(\cancel{V(\bar{x}_2)} + \cancel{V'(\bar{x}_2)}^{=0}(x-\bar{x}_2) + V''(\bar{x}_2)\frac{(x-\bar{x}_2)^2}{2} + o_2\Big)$$

$$= \underbrace{-V''(\bar{x}_2)}_{>0}\,\frac{(x-x_2)^2}{2} + o_2$$

Caso generico $\begin{cases} V''(\bar{x}_2) < 0 \end{cases}$

$\longrightarrow | \; V''(\bar{x}_2) = 0 \Rightarrow \exists \; k \; | \; V^{(j)}(\bar{x}_2) = 0$ per $j < 2k$ e $V^{(2k)}(\bar{x}_2) < 0$

Nel caso generico

$$\frac{1}{\sqrt{e_2 - V(x)}} = \underline{\frac{1}{|V''(\bar{x}_2)|^{\frac{1}{2}} |x - x_2|}} \; \frac{1}{\sqrt{1 + o_1}} \; , \quad x \to \bar{x}_2$$

$$V'(x) = \cancel{V'(\bar{x}_2)}^{=0} + V''(\bar{x}_2)(x - x_2) + o_1(x - \bar{x}_2)$$

$$= V''(\bar{x}_2)(x - x_2)(1 + o(1))$$

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-V''(\bar{x}_2)}{|V''(\bar{x}_2)|^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sgn}(x - \bar{x}_2) \frac{1 + o(1)}{\sqrt{1 + o_1}}$$

$$\frac{1 + o(1)}{\sqrt{1 + o_1}} \to 1.$$

$$\xrightarrow[x \to \bar{x}_2 \pm]{} \underline{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} |V''(\bar{x}_2)|^{\frac{1}{2}}}$$

Es. 1 (§ 9.7)

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3x^2 = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$\ddot{x} + V'(x) = 0 \; , \; V(x) = -x^3$

$E(x, y) = \frac{y^2}{2} - x^3$

Dimostrare che $x(t) > 0$, ha un minimo globale in $t = 0$ ed è convessa. Grafico qualitativo della soluzione.

CASO HAMILTONIANO GENERALE

$H(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$

$\dot{y} = -H_x(x, y) \qquad (x = q)$

$$\begin{cases} \dot{y} = \ldots & (y = p) \\ \dot{x} = H_y(x, y) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$$

$x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n$

$n-1$ sono integrabili

se $(x(t), y(t)) \to (\bar{x}, \bar{y})$

$\Rightarrow \underline{\nabla H(\bar{x}, \bar{y}) = 0}$

$$E(1,0) = -1$$

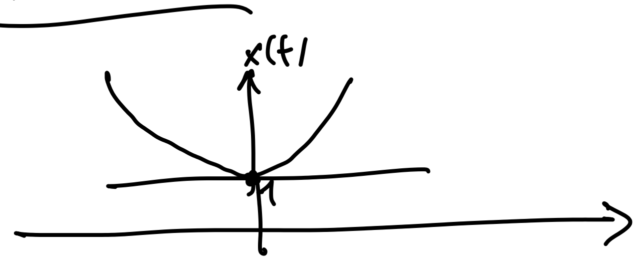
$E(x,y) = -1 \qquad \underline{\frac{y^2}{2} = x^3 - 1} \Rightarrow \underline{x^3 \geq 1.}\ \forall t.$

$\Longleftrightarrow x(t) \geq 1 \quad \forall t$

$\underline{\ddot{x} = 3x^2 > 0} \Rightarrow x$ è strett. convessa.

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow 0$ è un min loc. stretto.

$\Rightarrow$ <u>per convessità</u> 0 è un minimo globale stretto



$x(t)$ è una funzione pari

<u>infatti</u>:
$$\begin{cases} \ddot{x} = 3x^2 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$\tilde{x}(t) := x(-t)$

$\tilde{x}(0) = x(0) = 1$

$\dot{\tilde{x}}(t) = -\dot{x}(-t) \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(0) = 0.$

$\ddot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{\ddot{x}(-t) = 3(x(-t))^2}$ $= 3\,\tilde{x}^2(t).$

Per unicità $\underbrace{\tilde{x}(t) \equiv x(t)}$
$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{x(-t)}$

ES. Fare il ritratto fase del sistema $\frac{y^2}{2} - x^3$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t;\alpha) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, \; t \in I \quad \alpha \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^m$$
parametri

$(x \in A \subseteq \mathbb{R}^n)$

$f \in C^k(A, I) \to \mathbb{R}^n$

$\phi^t(x_0;\alpha)$, $t \in I_{max}$

Teorema di regolarità

$(x_0, \alpha, t) \to \phi^t(x_0;\alpha) \in C^k$

$t \to \phi^t(x_0;\alpha) \in C^{k+1}(I_{max})$

Venerdì 4/12 iniziamo alle 16:00