venerdì 20 novembre 2020 16:15

# Forme canonica di Jordan

Alcune definizioni:

1. Matrice nilpotente di ordine k standard

$$k\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{k}\right. = N_k \qquad (N_k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \qquad \begin{array}{l} j = i+1 \\ i = 1 \end{array}$$

2. $J_n(\lambda) :=$ blocco di Jordan di ordine $n$ e autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$

$$J_n(\lambda) = \lambda \cdot I_n + N_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

**Teorema di Jordan** Sia $A \in Mat_{\mathbb{C}}(n)$

$\exists$ una matrice invertibile $U \in GL(n)$ |

$$U^{-1} A U = \boxed{\beta(J^{(1)}, \dots, J^{(m)})} =: B \quad \text{FORMA CANONICA DI JORDAN}$$

dove $J^{(j)}$ sono blocchi di Jordan di ordine $n_j$ $(\Sigma n_j = n)$ e $\beta(J^{(1)}, J^{(2)}, \dots)$, matrici quadrate

$$\begin{pmatrix} \boxed{J^{(1)}} & & & \\ & \boxed{J^{(2)}} & 0 & \\ 0 & & \boxed{J^{(3)}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

N.B. a meno di scambio di colonne di $U$ possiamo assumere che la forma canonica di Jordan sia:

$$B = \beta\Big(\underbrace{J_{n_1^{(1)}}(\lambda_1), \dots, J_{n_{s_1}^{(1)}}(\lambda_1)}, \dots, \underbrace{J_{n_1^{(m)}}(\lambda_m), \dots, J_{n_{s_m}^{(m)}}(\lambda_m)}\Big)$$

con $m \geq 1$, $s_j \geq 1$, $n_i^{(j)} \leq n_{i+1}^{(j)}$

$$n = \sum_{i,j} n_j^{(i)}$$

Inoltre $\sigma(A) = \{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq m\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall i \neq j$

$$\det\left(\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \ddots & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}}_{J_k\ \text{dato}} - zI\right) = P_J(z)$$

$$= \det\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda-z & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ 0 & & & \lambda-z\end{pmatrix}}_{k} = (\lambda-z)^k$$

---

- Una matrice $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ è diagonalizzabile $(U^{-1}AU = \Lambda)$
$\iff \exists\ n$ autovett. indip. di $A$

( $\Leftarrow$: $Au_i = \lambda_i u_i$ $\quad U = [u_1, \dots, u_n]$ ✓

"$\Rightarrow$": se $U^{-1}AU = \Lambda \iff AU = \Lambda U = [\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_n u_n]$
$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

quindi le colonne della matrice $U$ (che sono indip) sono autov. di $A$

---

$$N_k = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & \ddots & 1\\ 0 & & 0\end{pmatrix}}_{k} \qquad N_1 = 0 \qquad N_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq 0,\ N_2^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

In generale

$$N_k^j = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ & \ddots & 0 & \ddots & 1\\ 0 & & \ddots & & 0\end{pmatrix} \quad (\text{colonne } j,\ j+1) \qquad j+1 \leq k$$

$$N_k^{k-1} = \begin{pmatrix}0 & & 0 & 1\\ & \ddots & 0 & 0\\ 0 & & & 0\end{pmatrix} \neq 0$$

$$\underline{\underline{N_k^k = 0.}}$$

$$N_4 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$N_4^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & & 1\\ & & & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ordine di $N_k$ è anche l'ordine di nilpotenza di $N_k$

Def. Ordine di nilpotenza di $A$ è il

— $\min\{d \mid A^d = 0,\ \underline{A^j \neq 0\ \forall\ 1 \le j \le d-1}\}$.

(può essere $\infty$) se l'indice di nilp. $< \infty$

diremo che $A$ è nilpotente

(equivalentemente, una matrice $A$ è nilpotente sse $\exists\ d \ge 1 \mid A^d = 0$.)

---

<u>ES.</u> Un blocco di Jordan $\overbrace{\text{non è}}^{\text{di ordine } n \ge 2}$ <u>diagonalizzabile</u>

$J = \lambda I + N$, (ordine $J = n$.)

Supponiamo p.a., che lo sia:

$$U^{-1} J U = \Lambda, \ \Lambda \text{ diag.}$$

$$U^{-1}(\lambda I + N) U = \lambda I + U^{-1} N U \Rightarrow \underline{U^{-1} N U = \tilde{\Lambda}}$$

con $\tilde{\Lambda}$ diag. $= \underline{\Lambda - \lambda I}$

$$(U^{-1} N U)^n = U^{-1} N \cancel{U} \cdot \cancel{U^{-1}} N \cancel{U} \cdots \cancel{U^{-1}} N U$$

$$= U^{-1} N^n U = 0.$$

$$\Rightarrow \Lambda = \lambda I \Leftrightarrow \hat{\Lambda} = 0. \quad U^{-1} N U = 0$$

$$\Leftrightarrow N = 0 \quad \text{contradd. per } n \ge 2.$$

---

<u>Def.</u> $\sigma(A) = \{\lambda \mid P_A(\lambda) = 0\}$ = <u>spettro di $A$</u>

dove $P_A(z)$ = polin. caratt. di $A$ = $\underline{\det(A - z I)}$

$$P_A(z) = \underline{(-1)^n} (z - \lambda_1)^{a_1} \cdots (z - \lambda_m)^{a_m} \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ per } i \neq j$$

$$a_1 + \cdots + a_m = n$$

in altri termini $a_j$ è la molteplicità di $\lambda_j$

$\boxed{a_j := \text{molteplicità algebrica dell'autovalore } \lambda_j}$

$g_j :=$ molteplicità <u>geometrica</u> di $\lambda_j :=$

$$\frac{\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_j I)}{}$$

$= \#$ autovettori indipendenti con autovalore $\lambda_j$.

Quindi $A$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $a_j = g_j$, $\forall j$.

---

<u>Polinomio minimo di $A$</u> $\quad p_A(z)$ (p minuscolo)

è l'unico polinomio monico di grado minimo

$$p_A(A) = 0$$

$$\left( \text{se } \quad p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 \atop p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_0 I \right)$$

<u>Inoltre</u>: $\exists\, d_i \geq 1$:

$$p_A(z) = (z-\lambda_1)^{d_1} \cdots (z-\lambda_m)^{d_m}$$

$$\boxed{d_j := \text{l'indice di nilpotenza di } \lambda_j}$$

$$\boxed{K_j := \operatorname{Ker}(A-\lambda_j I)^{d_j} =: \text{autospazio generalizzato relativo all'autovalore } \lambda_j}$$

---

$$J := J_n(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n \qquad \sigma(J) = \{\lambda\}, \quad \underset{\text{dim. alg.}}{a(\lambda) = n}$$

$g(\lambda) =$ dim. geo. di $\lambda = ?$

$$\begin{matrix} u \in \mathbb{C}^n \\ u \neq 0 \end{matrix} \Big| \quad Ju = \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda u_1 + u_2 \\ \lambda u_2 + u_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda u_{n-1} + u_n \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda u_{n-1} \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\lambda u_1} + u_2 = \cancel{\lambda u_1} \implies u_2 = 0.$$
$$u_3 = 0$$
$$\vdots$$
$$\cancel{\lambda u_{n-1}} + u_n = \cancel{\lambda u_{n-1}}, \quad u_n = 0$$

possiamo prendere $\underline{u_1 = 1}$. Quindi l'unico autovettore di $J - \lambda I$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e^{(1)}$

$$\implies \boxed{g(\lambda) = 1}$$

---

Se $B$ è in forma canonica di Jordan con le convenzioni di sopra

$$\searrow \quad B = \beta\Big(\overbrace{J_{\underline{n_1^{(1)}}}(\lambda_1), \dots, J_{\underline{n_{s_1}^{(1)}}}(\lambda_1)}^{\lambda_1}, \dots, \overbrace{J_{n_1^{(m)}}(\lambda_m), \dots, J_{n_{s_m}^{(m)}}(\lambda_m)}^{\lambda_m}\Big)$$

$$n = \sum_{i,j} n_j^{(i)}$$

$$\downarrow \quad , J_{n_1^{(j)}}(\lambda_j), \dots, J_{n_{s_j}^{(j)}}(\lambda_j),$$

$a_j$ = molt. alg. di $\lambda_j = n_1^{(j)} + \dots + n_{s_j}^{(j)} = \sum_{i=1}^{s_j} n_i^{(j)}$

$g_j$ = " geom. di $\lambda_j = s_j$

Esempi

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}}_{} \end{pmatrix}}_{}, \quad a(\lambda) = 7$$

$$P_B(z) = (\lambda - z)^7, \quad g(\lambda) = 2$$

e i due autovettori indip. sono

$$e^{(1)} = (1,0,0,0,0,0,0) \quad , \quad e^{(4)} = (0,0,0,1,0,0,0)$$

Indice di nilpotenza di $\lambda_j$ = $\max\limits_{1 \le i \le s_j} n_i^{(j)} =: d_j$

$\dim K_j = \ker (A - \lambda_j I)^{d_j}$ = dimensione dell'AUTOSPAZIO GENERALIZZATO di $\lambda_j$ = ?

$$B = \begin{pmatrix} (\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & & \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$p_B(z) = (z - \lambda)^d$$

$$p_B(B) = (B - \lambda)^d = 0$$

$$(B - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{pmatrix}, \quad (B - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^2 \end{pmatrix}, \quad (B - \lambda I)^3 = 0$$

$$\left( \begin{pmatrix} \boxed{A} & 0 \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix} \right.$$ matrice a blocchi (quadrat.

$$\operatorname{Ker} (B - \lambda I)^3 = \operatorname{Ker} 0 = \mathbb{C}^7 .$$

$$\dim \operatorname{Ker} (A - \lambda_j)^{d_j} = a_j$$