mercoledì 21 ottobre 2020 16:16

(1) $\quad a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t).$

CRITERIO DI MASSIMALITÀ

Sia $f \in C(\mathbb{R}^n \times I, \mathbb{R}^n)$, I int. aperto di $\mathbb{R}$ (Es: $I = \mathbb{R}$), f è localmente lipschitziana in x uniformemente su I ($\forall K$ compatto di $\mathbb{R}^n$ e $[a,b] \subseteq I$ $\exists L>0 \mid |f(x,t) - f(y,t)| \le L|x-y|,\ \forall x,y \in K\ \forall t \in [a,b]$)

(questo vale se $f \in C(\mathbb{R}^n \times I, \mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x,t)$ è C^1 $\forall t \in I$ ossia $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\mathbb{R}^n \times I, \mathbb{R}^n)$).

Proposizione (a criterio di massimalità). Se f è anche t.c. $\exists \mu, \lambda \ge 0$ (*) $|f(x,t)| \le \mu + \lambda|x|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, t \in I$, allora $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in I$, $I(x_0,t_0) := (T_-(x_0,t_0), T_+(x_0,t_0)) = I =: (a,b)$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$

(l'intervallo massimale di $\exists!$ di (PC) $\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ la cui unica soluzione è $\phi^t(x_0,t_0)$)

Dim. Supponiamo, P.A., che $T_+ < b$ (il caso $T_- > a$ è analogo). per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in I$ $T_+ = T_+(x_0,t_0)$.

(2) $\quad \phi^t(x_0,t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\phi^s(x_0,t_0), s)\, ds$

Sia $g(t) := |\phi^t(x_0,t_0)|$. Allora, $\forall T_+ > t \ge t_0$

$$g(t) \le |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(\phi^s(x_0,t_0), s)|\, ds$$

$$\overset{(*)}{\le} |x_0| + \int_{t_0}^{t} (\mu + \lambda g(s))\, ds$$

$$\le \underbrace{|x_0| + (T_+ - t_0)\mu}_{\delta} + \lambda \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

$$=: \delta + \lambda \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

Gronwall

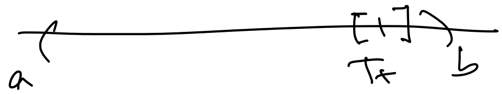
$\Longrightarrow \quad g(t) \le \delta e^{\lambda(t-t_0)} \le \underline{\delta e^{\lambda(T_+-t_0)}} =: R > 0$,

$\forall\, t_0 \le t < T_+$

$D_0 := \{ |x-x_0| \le 2R \}$.

Sia $\tau > 0 \;|\; a < T_+ - 2\tau < \underline{T_+ + 2\tau < b}$

(ad esempio se $(a,b) = (-\infty, +\infty)$ posso prendere $\tau = 1$)

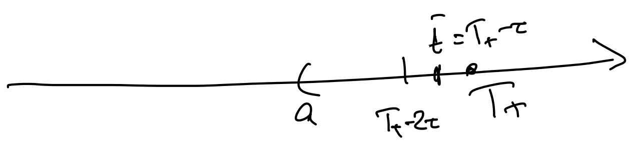


$I_0 = [T_+ - 2\tau, T_+ + 2\tau]$.

$\underline{M_0 := \max_{D_0 \times I_0} |f|}$ e L_0 la cost. di Lip. relativa al compatto $D_0 \times I_0$

Consideriamo il P. di C.

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(\bar{t}) = \phi^{\bar{t}}(x_0,t_0) =: \bar{x} \end{cases}, \quad \bar{t} := \text{come in (4) qui sotto}$$



$\underline{\text{Picard-Lindelöf}}$: $\exists!$ sol. di (3), $x(t)$

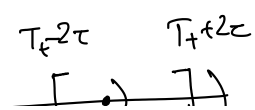
$\forall t : |t - \bar{t}| \le \underline{T} = \min\{T_0, \frac{r}{M}\}$

dove $M = \sup_{\substack{|x-\bar{x}| \le r \\ |t-\bar{t}| \le T_0}} f$

($f \in C(\{|x-\bar{x}| \le r\} \times |t - \bar{t}| \le T_0, \mathbb{R}^n)$

e $|f(x,t) - f(y,t)| \le L|x-y| \quad \forall\, x,t \,|\, |x-\bar{x}| \le r, |t-\bar{t}| \le T_0$)

Voglio applicare P.-L. con $r = R$, $\underline{T_0 = \tau}$



$a \qquad \underbrace{T_f}_{I_0} \qquad b$

Voglio $\underline{\bar t + \bar T > T_f}$.

$\underline{[\bar t - T_0, \bar t + T_0]} \subseteq I_0 \leftarrow \forall x$

$\underline{\{|x - \bar x| \le R\}} \subseteq \underline{|x - x_0| \le 2R}$

Ma, se $x \in$

$$|x - x_0| \le |x - \bar x| + |\bar x - x_0| \le R + |\phi^{\bar t}(x_0,t_0) - x_0|$$

$$\le 2R$$

n.b. infatti da Gronwall segue che

$$|\phi^t(x_0,t_0) - x_0| \le \delta_0 e^{\lambda(T_f - t_0)}, \quad \text{con } \delta_0 = (T_f - t_0)\mu.$$

$$< \delta\, e^{\lambda(T_f - t_0)} = R$$

$$M = \sup_{\substack{|x-\bar x| \le R \\ |t - \bar t| \le T_0}} |f| \le \sup_{D_0 \times I_0} |f| = M_0$$

$$\boxed{\bar T := \min\left\{ \underline{\tau}, \frac{R}{\underline{M_0}} \right\}}, \qquad \underline{\bar T < T_0}$$

$\phi^t(x_0,t_0)$ può essere estesa fino al tempo $\bar t + \bar T$ e se $\bar t + \bar T > T_f$ ho una contraddizione. Voglio trovare $\bar t < T_f$ t.c.

(i) $[\bar t - \tau, \bar t + \tau] \subseteq [T_f - 2\tau, T_f + 2\tau]$

(ii) $\bar t + \bar T > T_f$

$$\text{(ii)} \iff \underline{\bar t} > T_f - \bar T = \overbrace{\underline{T_f - \min\left\{\tau, \frac{R}{M_0}\right\}}}^{T_f > c_1 > 0} > 0$$

$$\text{(i)} \iff T_f - 2\tau \le \bar t - \tau, \quad \underline{\bar t} + \tau \le \underline{T_f} + 2\tau$$

$$0 < \underbrace{T_f - \tau}_{0 < c_2 < T_f} \le \underline{\bar t} \qquad \boxed{\underline{\max\{c_1,c_2\}} < \bar t < \underline{T_f}} \quad (4)$$

finito. ∎

$\ddot x + p_1(t)\dot x + p_0(t)x = h(t)$ $\qquad p_1(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \quad p_0(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$

assumendo $a(t) \neq 0$

$a, b, c, h \in C(I)$

$(I = \mathbb{R})$.

$y(t) := \dot x(t)$, $\dot y = \ddot x = -p_1 y - p_0 x + h$

$z(t) = (x(t), y(t))$

$$\dot z = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -p_1 y - p_0 x + h \end{pmatrix} = \underset{\text{mat }(2\times 2)}{A(t)}\, z + \underset{\mathbb{R}^2}{H(t)}$$

dove

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_1(t) & -p_0(t) \end{pmatrix} \qquad H(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot z = f(z,t)}, \qquad f(z,t) = A(t)z + H(t).$$

$$|f(z,t)| \le \sup_t |H(t)| + \|A(t)\|\,|z|$$

$$\le \underbrace{\sup_t |H(t)|}_{\mu} + \underbrace{\left(\sup_t \|A(t)\|\right)}_{L} |z|$$

Assumiamo che $p_1(t)$ e $h(t)$ siano continue e limitate su I.

Per il criterio di sublinearità le soluzioni del

(PC) $\begin{cases} \dot z = f(z,t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$ sono definite su tutto I.

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \ddot x + p_1 \dot x + p_0 x = h \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot x(t_0) = y_0 \end{cases}$ $\qquad z_0 := (x_0, y_0)$

Es. Scrivere l'equazione e il P.C.

$$\begin{cases} x^{(n)} = g(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

come un sistema su $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z,t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$ con $z \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$.