lunedì 21 dicembre 2020 16:13

Soluzioni test di preparazione all'esame scritto del 15-12-20.

Es. 1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali

(a) $\dot{x} = \frac{x}{t} + 3x^3$, $(t \neq 0)$

Questa è un'equazione di Bernoulli. Si riduce ad un'equazione lineare tramite il cambio di variabile:

$y(t) = y = \frac{1}{x^2}$.

In tal caso $\dot{y} = -2\frac{y}{x}\dot{x}$, da cui $\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{x}{y}\dot{y}$

e, inserendo in (a), si ottiene

$$\dot{y} = -2\frac{y}{t} - 6yx^2 = -2\frac{y}{t} - 6$$

Se $A(t) = \int \left(-\frac{2}{t}\right)$ ossia $A(t) = -2\log|t| = \log\frac{1}{t^2}$

si ha $e^{A(t)} = \frac{1}{t^2}$ e

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(s)}(-6)\,ds + e^{A(t)}c$$

$$= \frac{c}{t^2} - 2t.$$

Quindi

$$|x(t)| = \sqrt{\frac{t^2}{c-2t^3}}$$

ossia

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{t^2}{c-2t^3}}$$

dove il segno e il valore di c vanno scelti a seconda del dato iniziale.

(b) $\underbrace{((1+x)y+x)}\, dx + x\, dy = 0.$

$=: X\, dx + Y\, dy$

Questa non è un'espressione diff. esatta, ma lo diventa moltiplicando per un "fattore integrante" $\alpha = \alpha(x)$:
Infatti, moltiplicando per $\alpha(x)$ e imponendo la relazione

$$(\alpha X)_y = (\alpha Y)_x$$

si ottiene

$$\alpha\,(1+x) = \alpha' x + \alpha \iff \alpha = \alpha' \Rightarrow \alpha = e^x$$

Cerchiamo una $F(x,y)$ t.c. $F_x = e^x \cdot X$ e $F_y = e^x Y$

$$F_y = e^x Y = x \cdot e^x \Rightarrow F = x e^x y + g(x)$$

e da $F_x = e^x X$ si ottiene $g' = x e^x$

$$\Rightarrow g = e^x (x-1) \quad (\text{a meno di costanti})$$

In definitiva, $F(x,y) = xye^x + e^x(x-1)$
e le soluzioni di (b) sono date (implicitamente) da

$$xye^x + e^x(x-1) = c.$$

(c) $\ddot{x} - x = te^t$

La soluzione generale dell'equaz. omogenea $\ddot{x} - x = 0$
è data da $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$
Per trovare una soluzione particolare si può usare il metodo di variazione delle costanti

$$y(t) = a(t)\, e^t + b(t)\, e^{-t}$$

Derivando ed inserendo in (c) si ottiene

$$(\ddot a + 2\dot a)\, e^{t} + (\ddot b - 2\dot b)\, e^{-t} = t e^{t}$$

$$\iff \begin{cases} \ddot a + 2\dot a = t \\ \ddot b - 2\dot b = 0 \end{cases}$$

Quindi possiamo prendere $b \equiv 0$ e $a(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)$

ossia $y(t) = \frac{1}{4}(t^2 - t)\, e^{t}$.

La soluzione generale di (c) sarà, dunque,

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + y(t).$$

(d) $\dot x = Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$, $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Gli autovalori di A sono $\lambda_0 = 0$ (molteplicità algebrica 2) e $\lambda_1 = 2$

Un autovettore di A con autovalore 0 è $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v_0$

Quindi $x^{(1)}(t) \equiv v_0$ è un equilibrio di (d).

L'equazione $Aw = v_0$ ha una soluzione data da

$$w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Quindi un'altra soluzione di (d) è data da

$$x^{(2)}(t) := w + t v_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ t \\ -\frac{1}{3} + t \end{pmatrix}$$

Infine, un autovettore con autovalore $\lambda_1 = 2$ è dato da $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi una terza soluzione indipendente è data da

$$x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

La soluzione generale di (d) è, dunque, data da

$$x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) + c_3 x^{(3)}(t).$$

Es. 2 Dalle ipotesi segue che $\begin{cases} \dot{x} > x \\ x(0) = 1 \end{cases}$

moltiplicando per e^{-t} otteniamo

$$e^{-t}\dot{x} - e^{-t}x > 0 \quad \text{ossia} \quad (e^{-t}x)^{\cdot} > 0$$

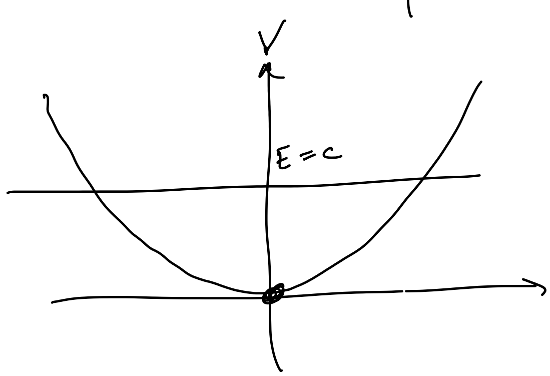
e integrando tra 0 e $t > 0$

$$e^{-t}x - 1 > 0 \iff x > e^{t}$$

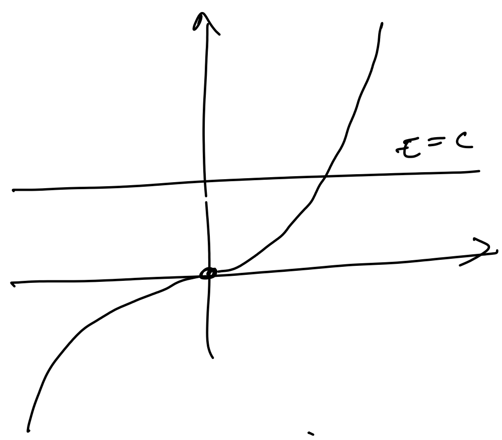
$$\Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty .$$

Es. 3 $\ddot{x} + x^p = 0 \iff \ddot{x} + V'(x) = 0$

con $V(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$



p dispari



p pari

In entrambi i casi non si hanno orbite eterocline

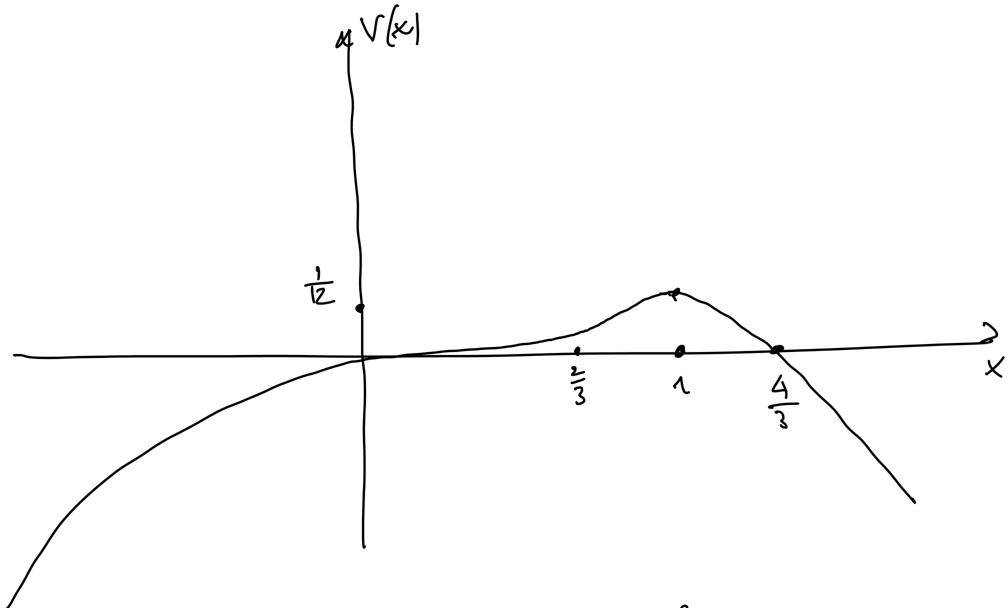
(affinché esistano orbite eterocline per un'equazione $\ddot{x} + V'(x) = 0$ è necessario che V abbia almeno due punti critici distinti x_1 e x_2 con $V(x_1) = V(x_2)$.)

Es. 4

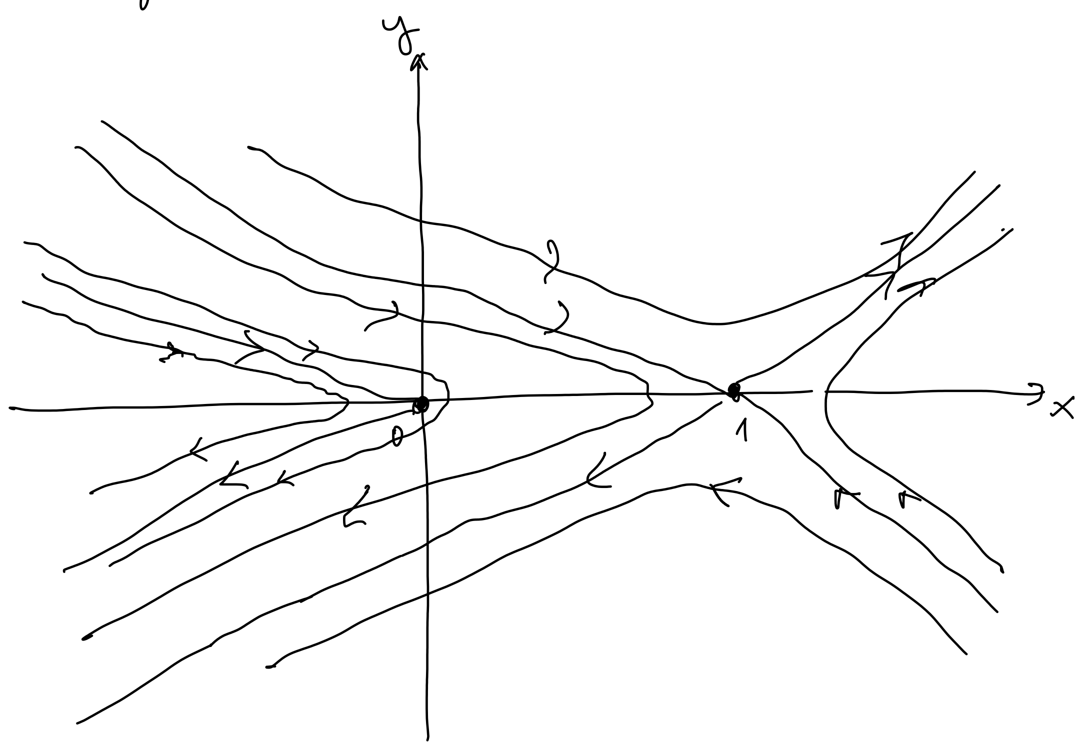
Es 4. $\ddot{x} + x(1-x) = 0 \iff \ddot{x} + V'(x)$

con $V = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

il cui grafico è



Da cui segue il seguente ritratto di fase



da cui si evince che non esistono

orbite periodiche non banali

e che i due unici equilibri $(x,y) = (0,0)$

e $(x_2, y_2) = (1, 0)$ sono [illegible].