mercoledì 25 novembre 2020 16:13

Analisi nello spazio delle fasi

Modello:

Eqne di Newton / sistema Hamiltoniano

$$\ddot{x} = -V'(x) \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases} \qquad (*)$$

dove $t \to x(t) \in C^2(I)$ $(I = \mathbb{R})$

$V \in C^1(I, \mathbb{R})$

V = potenziale del sistema.

($m\, a = f$ con f conservativa

ossia $f = -V'$

$a = \ddot{x}$, $x \equiv$ coordinata di un

punto materiale su $\mathbb{R}$)

Lo spazio delle fasi è il piano $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Assumiamo (salvo avviso contrario) che

$I(x_0, y_0) = \mathbb{R}$.

Osservazione centrale: $E(x,y) := \frac{y^2}{2} + V(x)$

=: ENERGIA DEL SISTEMA

(totale)

$E(x,y)$ è costante sui moti del sistema.

Se $x(t), y(t)$ è sol. di $(*)$

$$\frac{d}{dt} E(x(t),y(t)) = E_x \dot{x} + E_y \dot{y}$$

$$= V'(x)\dot{x} - y\, V'(x) = V' y - y V' = 0.$$

Notazione $\dot{(\ )} = \frac{d}{dt}(\ )$, $(\ )' = \frac{d}{dx}$

Eque $(*)$ è un sistema Hamiltoniano su R^2:

$$H(y,x) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = E(x,y)$$

$$(H)\begin{cases} \dot{y} = -H_x = -V'(x). \\ \dot{x} = H_y = y \end{cases}$$

$x \in M^n$ — $\Omega \subseteq R^n$, T^n, S^n

$y \in R^n$

$$\frac{d}{dt} H(\underbrace{y(t), x(t)}_{\text{sol. di } (H)}) = H_y \dot{y} + H_x \dot{x}$$

$$= \dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x} = 0.$$

(x_0,y_0) è un equilibrio (soluzione costante) di (H)

$\iff V'(x_0) = 0$, $y_0 = 0$.

Se $(x(t), y(t))$ è soluzione $\Rightarrow E(x(t), y(t)) = \underline{E_0 := E(x_0,y_0)}$

$t \in I \to (x(t), y(t))$ è una curva su R^2 $\quad E_0 = E(x_0, 0)$

Consideriamo l'insieme:

$\mathcal{E}_E := \{ (x,y) \mid E(x,y) = E \}$

$\mathcal{E}_E$ è localmente una curva regolare nell'intorno di punti $(\bar{x},\bar{y})$ / $\nabla E(\bar{x},\bar{y}) \neq (0,0)$ grazie al teorema delle funzioni implicite.

Se (x_0,y_0) è un equilibrio e $(x_0,y_0) \in \mathcal{E}_{E_0}$ $E_0 := E(x_0,y_0)$

in generale è un punto singolare di $\mathcal{E}_{E_0}$.

$$\nabla E\Big|_{(x_0,y_0)} = \left(V'(x), y\right)\Big|_{(x_0,y_0)} = \left(V'(x_0), y_0\right) = (0,0)$$

Relazione tra curve di fase $(\mathcal{E}_E)$ e moti

$\mathcal{E}_E \subseteq \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2}$ = spazio delle fasi

grafico di un moto (traiettoria, soluzione)

$\subseteq \underset{(t,x)}{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

- $E(x,y) = c :=$ "livello di energia"

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}y^2}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{energia potenziale}}$$

$$y^2 = 2\underline{(c - V(x))}$$

$$y = \pm \sqrt{2(c - V(x))} \quad \Leftarrow$$

"bisogna scegliere il segno"

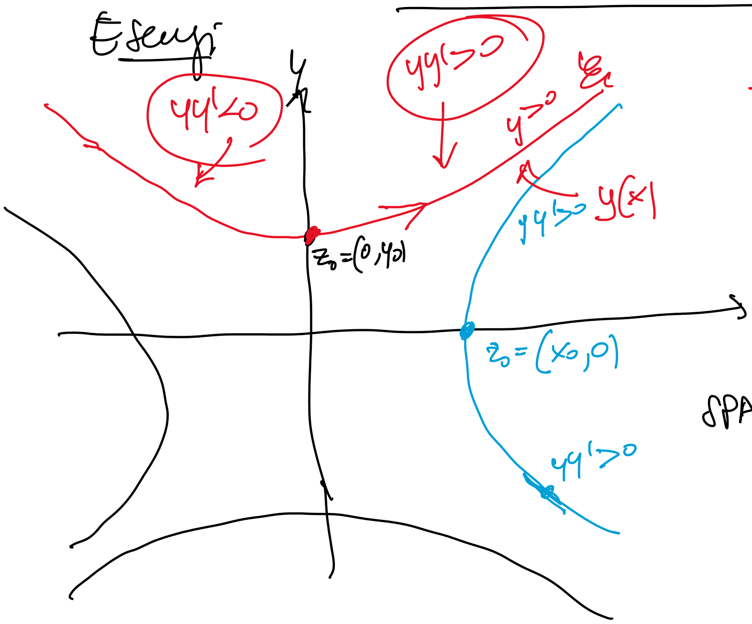
(i) $\quad \mathcal{E}_c \neq \emptyset \iff V(x) \leq c$

(ii) $\quad$ se $x_0 \mid V(x_0) = c \implies \mathcal{E}_c \overset{?}{=} \{(x_0, 0)\}$

(iii) $\quad$ se $\mathcal{E}_c \neq \emptyset \implies \mathcal{E}_c$ è simmetrico rispetto all'asse delle x.

$$\left(y \in \mathcal{E}_c \implies -y \in \mathcal{E}_c . \right)$$

Esempi



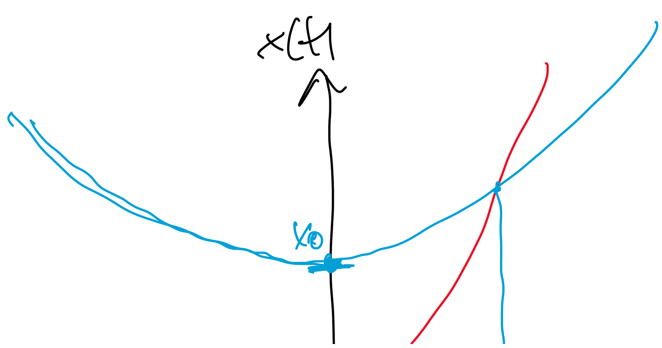
$$\ddot{x} = -V'(x)$$

$$c = \frac{1}{2} y^2 + V(x) \implies yy' + V'(x) = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} = -V'(x) = yy'}$$

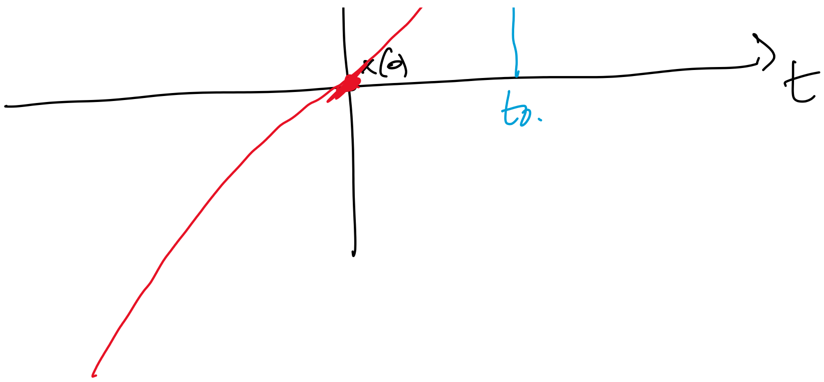
$$\ddot{x}(t) = -V'(x(t)) = y(x)\, y'(x) \Big|_{x(t)}$$

SPAZIO DELLE FASI



SPAZIO DEI MOTI

$\dot{x}(0) > 0.$



SOLUZIONI PERIODICHE

$x(t+T) = x(t)$, $\forall t$ per un qualche $T>0$.

Consideriamo soluzioni periodiche di periodo minimo $T>0$.

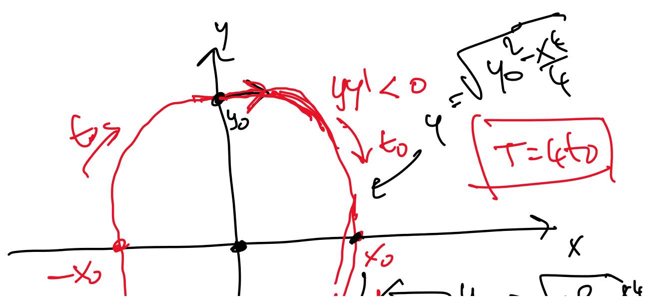
In particolare un equilibrio non è una soluzione periodica non banale (cioè con periodo minimo $T>0$).

Chiaramente se $(x(t), y(t))$ è una soluzione di (*) non banale $\Longrightarrow$

$$\mathcal{E}_c = E(x(0), y(0)) =: c \quad \text{è una curva regolare chiusa.}$$

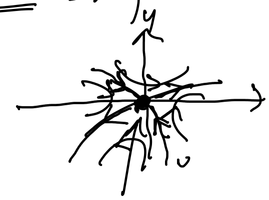
Esempio $\qquad \ddot{x} + x^3 = 0 \qquad V(x) = \frac{x^4}{4}$

$$E = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} \qquad y = \pm\sqrt{2c - \frac{x^4}{2}}$$

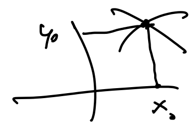


N.B. nello spazio dei moti le curve (= grafici di $x(t)$) [illegible] intersecarsi.

si possono ... mette nello spazio delle fasi le curve $\mathcal{E}_c$ non si possono intersecare:



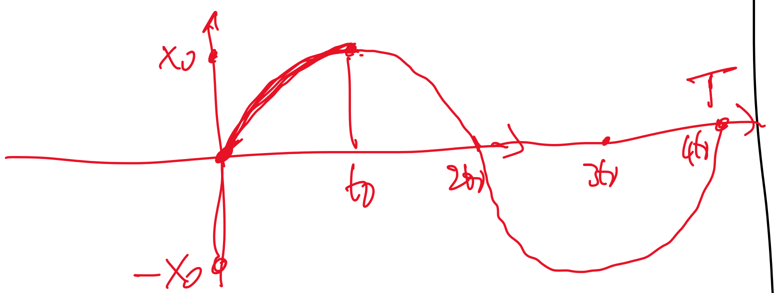
però se unico se $\frac{\nabla V(x_0)=0}{\eta}$



per unicità ci passa solo una curva.

se $c<0 \Rightarrow \mathcal{E}_c=\emptyset$

se $c=0 \Rightarrow \mathcal{E}_c=\{(0,0)\}$.



$\frac{dx}{dt}=y$, $\underline{dt}=\frac{dx}{y}$ ← 1-forme

← scrittura simbolica nel cambio variabili $t=t(x)$

$y=\sqrt{y_0^2-\frac{1}{2}x^4}$ $\quad 0\le t\le t_0$, $y\ge 0$

$$t_0=\int_0^{t_0}dt=\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{y_0^2-\frac{1}{2}x^4}}$$

$t=t(x)$

$\underline{\dot{x}>0}$.

(Es. questo è un integrale improprio convergente)

per simmetria

sia t_1 $\quad x(t_1)=0 \quad \dot{x}(t_1)=-y_0$.

$$t_1-t_0=\int_{t_0}^{t_1}dt=\int_{x_0}^{0}\frac{dx}{y}=\int_{x_0}^{0}\frac{dx}{-\sqrt{y_0^2-\frac{x^4}{2}}}=\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{y_0^2-\frac{x^4}{2}}}$$

$t_1 - t_0 = t_0$, $t_1 = 2t_0$.

Analy. fino a $4t_0$.