lunedì 26 ottobre 2020 16:12

Discussione ES. 4, 16, 18, 26, 29 [AA, § 3.5]

Es 4. Trovare i primi 3 termini dell'approssimazione di Picard per (1) $\begin{cases} \dot{x} = tx \\ x(0) = 1 \end{cases}$

L'equazione (1) in forma integrale

$$x(t) = 1 + \int_0^t s\, x(s)\, ds = \underbrace{\Phi(x)}(t)$$

$$x(t) = \lim_{k \to \infty} \Phi^k(1)(t), \quad \Phi^k := \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{k \text{ volte}}$$

$$k \geq 1$$

$x_k(t) := \Phi^k(1)(t)$. **Teo.** $x_k(t) \to x(t)$ sol. di (1).

$$x_0(t) \equiv 1$$

t

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t s\,ds = 1 + \frac{t^2}{2}$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2}\right) s = 1 + \int_0^t s + \frac{s^3}{2}$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{8}\right) s\,ds$$

$$= 1 + \int_0^t \left(t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{8}\right) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48}$$

$$x_4(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} + \frac{t^8}{8!!}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!!}$$

$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$
($0!! = 1$, $1!! = 1$, $2!! = 2$,
$3!! = 3$, ...)

$4!! = 4 \cdot 2$

$6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$

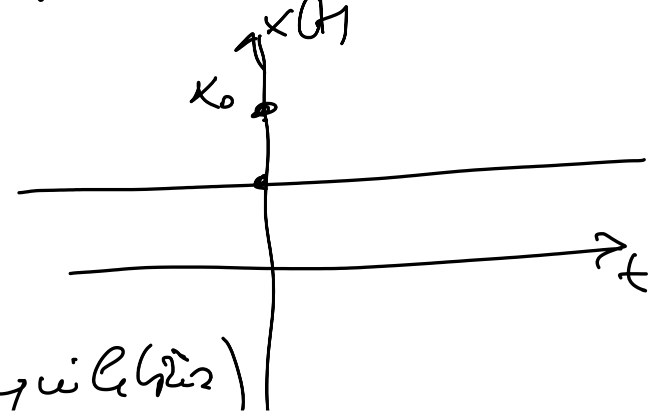
$$(2k)!! = 2^k k!$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k \frac{1}{k!} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\left(e^{t^2/2}\right)^{\cdot} = e^{t^2/2} \cdot t \qquad \begin{cases} \dot{x} = x t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ES 16 $\forall x_0$ le soluzioni $x(t)$ di (2) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 1 = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

è t.c. $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} x(t) = 1$.



$x^3 - 1 = 0 \iff x = 1.$

... è una soluzione (equilibrio)

$x(t) \equiv 1$ è una s. ...

$f(x) > 0 \iff \underline{x > 1}$.

$\dot{x} > 0 \quad \forall t$ quindi $\underline{x \text{ è strett. cres. su}}$ $(T_-, T_+) = I$

$x_- := \inf_I x = \lim_{t \to -\infty} x(t) < \sup_I x = \lim_{t \to +\infty} x(t) =: x_+$

$1 \leq \underline{x_-} < x_+ \leq +\infty$

Se fosse $1 < x_- \Rightarrow x(t)$ è strett. monotona

con $\lim_{t \to T_-} x(t) = x_- \in \mathbb{R}$ e $\lim_{t \to T_-} \dot{x}(t) = x_-^3 - 1 > 0$.

Teorema dell'asintoto $\Rightarrow \lim_{t \to T_-} \dot{x}(t) = 0$. Contradd.

$\Rightarrow \underline{x_- = 1}. \longleftarrow \lim_{t \to \underline{T_-}} x(t) = 1$

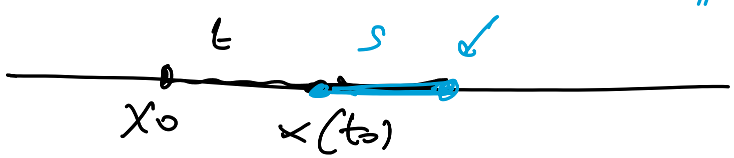
$\Gamma \quad \dot{x} = x^3 - 1 \qquad \exists\, t_0 > 0 \mid x(t_0) = 1$

Se $\begin{cases} \dots \\ x(0) = x_0 > 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 1 \\ x(t_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(t) \equiv 1.$$

$$x(t; x_0) \qquad x(t+s; x_0) = x(s, x(t; x_0))$$

$x(s, x(t_0)) = x(t+s, x_0)$ unicità



Dobbiamo dimostrare che $T_- = -\infty$.

Se fosse $T_- > -\infty$ $\qquad \lim_{t \to T_-} x(t) = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 1 \\ x(T_-) = 1 \end{cases} \Rightarrow x(t) \equiv 1. \Rightarrow \text{contraddice}$$

il fatto che (T_-, T_+) è l'intervallo max.

Oss. supplementare:

$x_+ = +\infty$.

Se fosse $\underline{1} < x_+ < \infty$.

$\lim \dot{x} = \lim x^3 - 1 = x_+^3 - 1 = 0$ contradd.

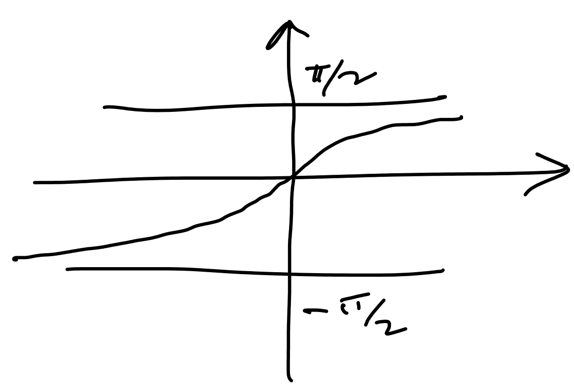
Teorema dell'asintoto.

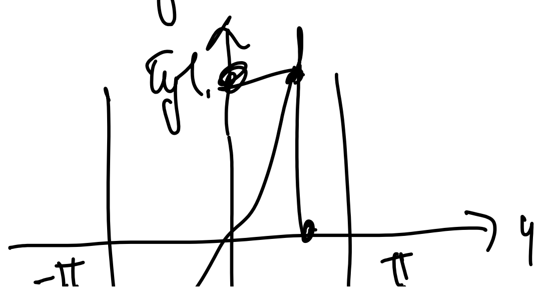
ES Dim se $T_+ < \infty$ o $T_+ = +\infty$.

ES. 18 Calcola $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ dove $x(t)$ è la sol. di

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \arctan x \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

arctan x



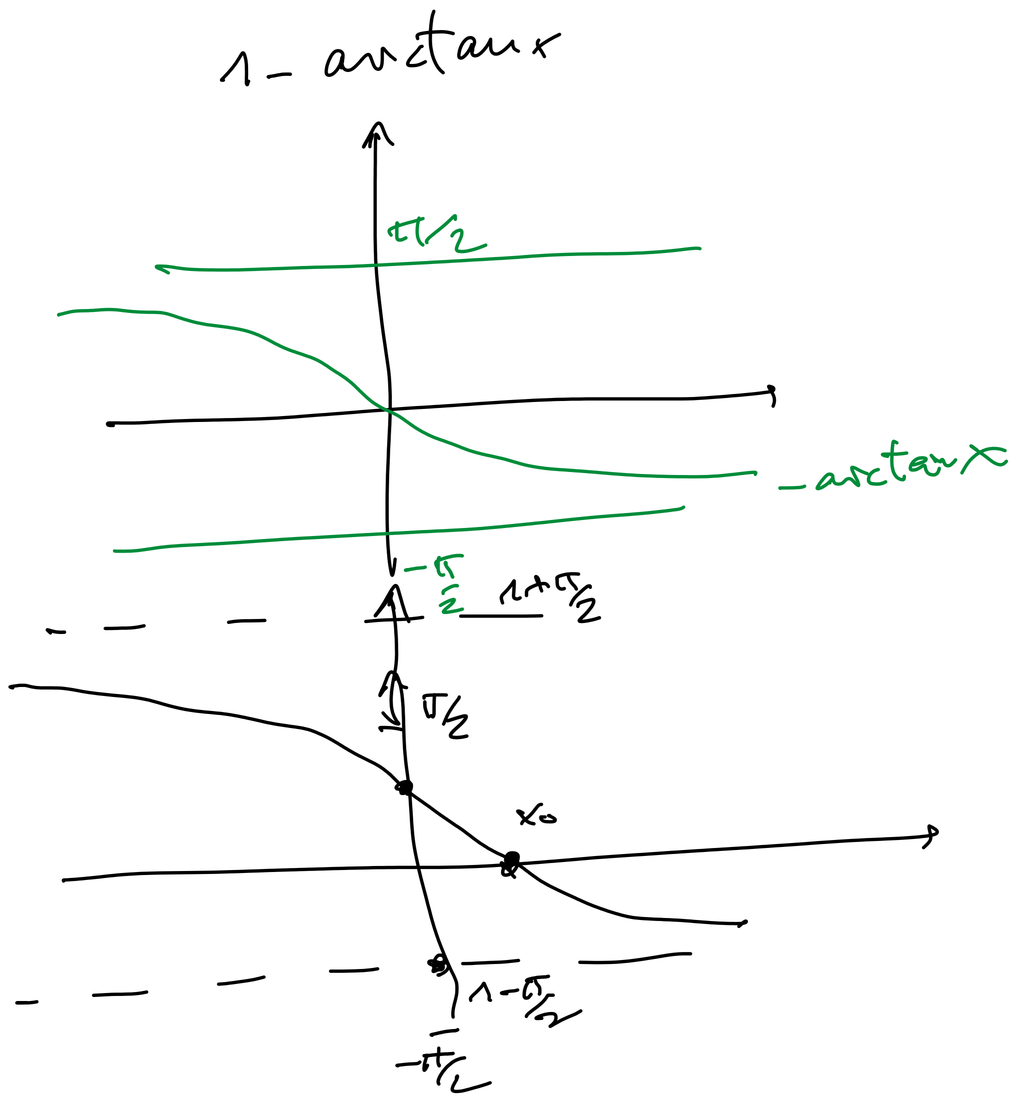


$\dot{x} = 0 \iff 1 = \arctan x$

$\iff \tan 1 = x_0 > 0$

$$\| \quad 1.557\ldots$$

$x_0 = \tan 1$ è un equilibrio



$$\lim_{t \to T_+} x(t) = x_0 = \tan 1 \implies T_+ = +\infty$$

[Controllare bene perché la soluzione che danno [AA] è $x_0 = \pi/2$.]

ES 26 Mostrare che le soluzioni di $\underline{\dot{x} = e^x - t - t^5}$ non hanno minimi.

$$\exists t_0 \mid x(\underline{t_0}) \le x(t) \quad \forall \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

se locale

$$x(\underline{t_0}) \le x(t) \quad \forall \; t \in (T_-, T_+)$$

se è globale.

Se t_0 è un punto di minimo, è un punto interno all'int. di definizione (T_-, T_+).

$$\implies \dot{x}(t_0) = 0$$

$$\ddot{x} = \cancel{e^x \dot{x}} - 1 - 5t^4 \Big| = -1 - 5t_0^4 < 0$$

$x\big|_{t_0} = (\varepsilon \quad / x\big|_{t_0} \quad \big|_{t_0}$

$\Rightarrow$ è un max locale $\Rightarrow$ non è min.

$\Rightarrow$ contraddiz.

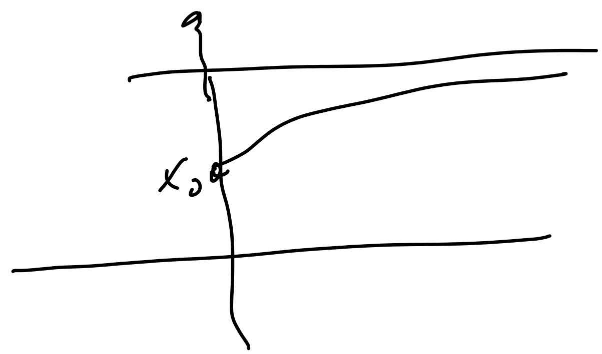
ES 29. Sia $x(t)$ la soluzione di $\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$

dove f regolare su $\mathbb{R}^2$.

Assumiamo che $x(t)$ sia definita su $[0,+\infty)$

e che $f(x,t) > x$. Allora $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$.

$\dot{x} > 0$



$\dot{x} \geq x_0$ $\qquad$ $\dot{x}(0) > x_0$

$A = \{ t \geq 0 \mid \dot{x}(t) > x_0 \}$.

Se $\sup A = +\infty \Rightarrow \dot{x}(t) \geq x_0 \quad \forall t$

$$x(t) - x_0 = \int_0^t \dot{x}(\tau) \geq x_0 t \qquad x(t) \geq x_0 t + x_0 \to +\infty.$$

Se $\tau = \sup A < \infty \Rightarrow \dot{x}(\tau) = 0$

$$0 \leftarrow \dot{x}(t) = f(x,t) \geq x_0$$

$$\begin{cases} \dot{x} > x \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases} \iff \dot{x} - x > 0 \iff e^{-t}(\dot{x} - x) > 0$$

$$e^{-t}(\dot{x} - x) = (x e^{-t})^{\cdot}$$

$$\int_0^t (x e^{-s})' > 0 \qquad x(t) e^{-t} > x_0$$

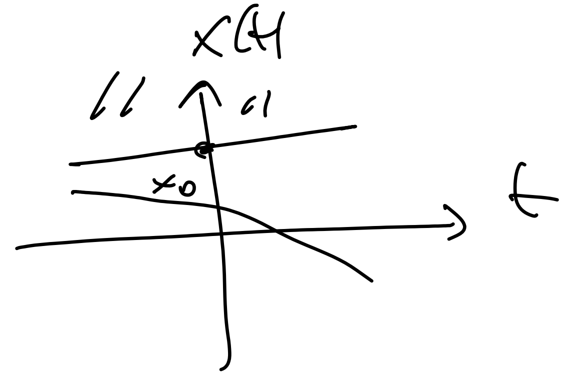
$$\underline{\underline{x(t) > e^t x_0 \nearrow +\infty.}}$$

$$\dot{x} = x^3 - 1$$

$x^3 - 1$

$x(0)=x_0$

$t \to T_f$?



$x^3-1=0 \iff x_0=1$.

$x_0=1$, $x(t)\equiv 1$.

$x_0>1$. $x(t)$ è crescente.

$x_0<1$ $x(t)$ è decrescente.

$x_0>1$. $x(t) \nearrow$. $\lim_{t\to T_f} x(t)=+\infty$

$$\frac{\dot{x}}{x^3-1}=1 \qquad \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^3-1}=t$$

$$\int^{x} \frac{dx}{\ } = t$$

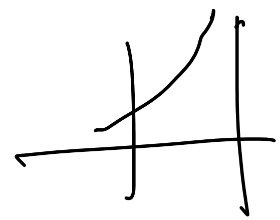
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = x_0 > 0. \end{cases}$$

x_0 ,, t^2

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = t$$

$$\frac{1}{x_0} - t = \frac{1}{x} \qquad x = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}, \qquad T_f = \frac{1}{x_0}$$



Mercoledì 28/10/22 alle 16:00