Sistemi meccanici unidimensionali

$$(1)\ \begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -V'(x) \end{cases} \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eqne di Newton unidimensionale}}}{\ddot x = -V'(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

o ancora

$$\dot z = f(z) \quad \text{con } z \in \mathbb{R}^2 \quad z = (x,y) \text{ e}$$

$$f(x,y) = (y, -V'(x))$$

Abbiamo visto che:

(i) $E(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + V(x) =:$ Energia del sistema

è una costante del moto ossia

se $(x(t), y(t))$ è soluzione di (1)

allora $E(x(t), y(t)) = \text{cost} = c$

(ii) (x_0,y_0) è un equilibrio di (1) (cioè $t \to (x_0,y_0)$ è soluzione costante di (1))

$\iff y_0 = 0$ e $V'(x_0) = 0$ (x_0 è un pto critico per V).

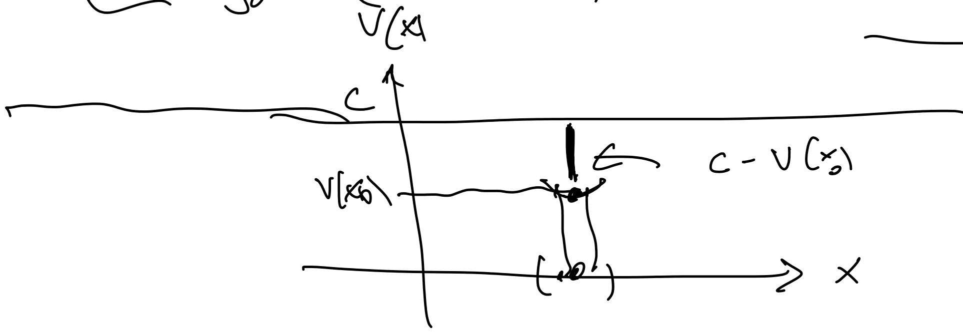
Def $\mathcal{E}_c := \{(x,y) \mid E(x,y) = c\}$

(iii) $\underset{(2)}{\boxed{\text{Se } \mathcal{E}_c = \{(x_0,y_0)\}}} \implies \boxed{(x_0,y_0) \text{ è un equilibrio} \implies V'(x_0) = 0 \text{ e } y_0 = 0.}$

$\boxed{\frac{1}{2} y^2 + V(x) = c}$ ha soluzione

Oss. Se $\mathcal{E}_c \neq \emptyset$ $\quad \boxed{\frac{1}{2} y^2 + V(x) = c}$

$$y_0^2 = 2\left(c - V(x_0)\right) \Rightarrow V(x_0) \leq c$$

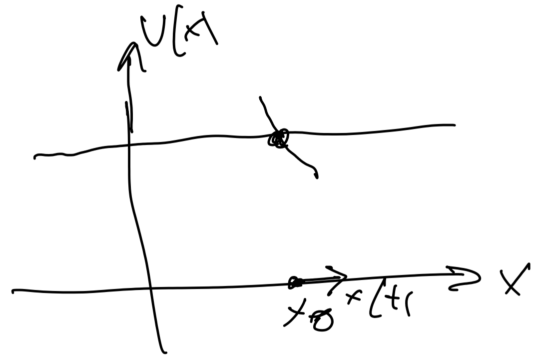


se $V(x_0) < c \Rightarrow \exists$ un intorno di x_0 per cui $V(x) < c \Rightarrow$ (2) ha infinite soluzioni, e quindi avremo una contraddizione

e quindi $\mathcal{E}_c$ contiene ∞ punti

dunque $V(x_0) = c$ e quindi $y_0 = 0$

se, p.a., $V'(x_0) \neq 0$.



$$\begin{cases} \dot{x} = y & x(0) = x_0 \\ \dot{y} = -V'(x) & y(0) = 0. \end{cases}$$

$\dot{y}(0) > 0 \Rightarrow$ per t piccoli $y(t) > 0$.

$$y = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{y(0)} + \int_0^t \dot{y}(s)\, ds > 0.$$

$(x(t), y(t)) \in \mathcal{E}_c$ e sono infiniti.

$\Rightarrow \quad (x(t), y(t)) \in \mathcal{E}_c$

$\Leftrightarrow \quad V'(x_0) = 0$ ma allora $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$

ed è un equilibrio.

<u>Teorema</u> $\mathcal{E}_c \neq \emptyset$ è una curva <u>regolare</u> chiusa (di Jordan) <u>che non contiene equilibri</u> $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}_c$ è la traccia di un'orbita periodica (non banale)

[cioè $\exists$ una soluzione $\underline{z(t) = (x(t), y(t))}$ e $\underline{T > 0}$

t.c. $\{ z(t) \mid t \in [0, T] \} = \mathcal{E}_c$

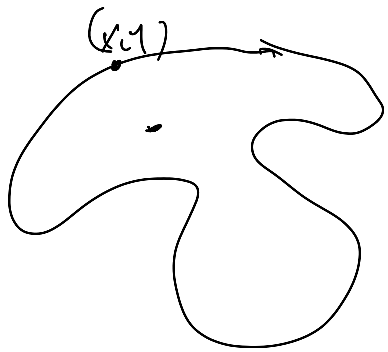
con $z(t+T) = z(t)$ e T periodo minimo.

[Inoltre, in tale caso,

$$T = \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{C - V(x)}}$$

con $x_- = \min \{ x \mid (x,y) \in \mathcal{E}_c \}$

e $x_+ = \max \{ x \mid (x,y) \in \mathcal{E}_c \}$.

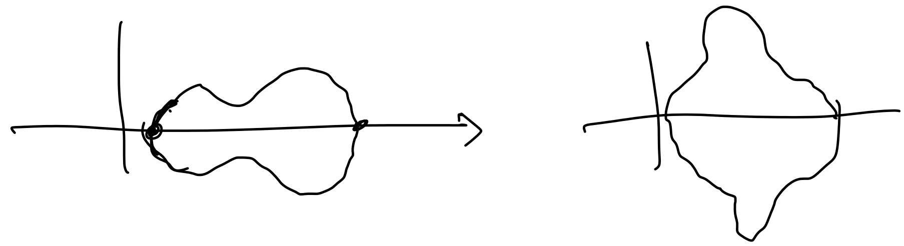


$\underline{\forall (x,y) \in \mathcal{E}_c}$

$\underline{\text{o } y \neq 0 \text{ o } y = 0 \Rightarrow V'(x) \neq 0.}$

N.B. $\mathcal{E}_c$ sono simmetriche rispetto all'asse delle x

$$(x,y) \in \mathcal{E}_c \iff (x,-y) \in \mathcal{E}_c$$



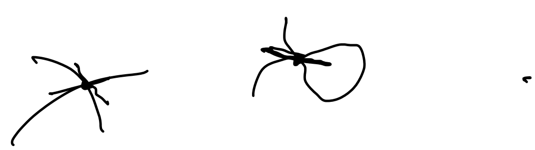
Dim

"$\Leftarrow$" se $z(t)$ è una soluzione periodica di (1) non banale $\Rightarrow$ $\dot z(t) \neq 0, \ \forall t$

(se fosse $\dot z(t_0)=0$ per un t_0

$$\dot z(t_0) = (\dot x(t_0), \dot y(t_0)) = (\underset{0}{\underset{\shortparallel}{y(t_0)}}, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{-V'(x(t_0))}})$$

ovvia $t \to z(t_0)$ sarebbe un equilibrio contro le ipotesi.



non possono succedere (*)

Dim "$\Rightarrow$" sia $z=(x_0,y_0) \in \mathcal{E}_c$ e

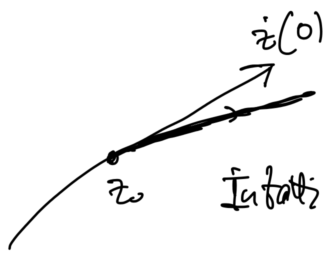
sia $\underline{\Phi^t(x_0,y_0)} = z(t) = (x(t), y(t))$

(cioè $\left\{ \begin{array}{l} \dot x = y \\ \dot y = -V'(x) \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{l} x(0)=x_0 \\ y(0)=y_0 \end{array} \right.$)

e sia I l'intervallo max di $\exists$ di $z(t)$.

(1) $\dot{z}(t) \neq 0 \quad \forall\, t$ (altrimenti $z(t)$ sarebbe un equilibrio).

(2) $\underline{J} := \{\, \underline{t \geq 0} \mid z(s) \neq z_0 \quad \forall\, 0<s\leq t \,\}$

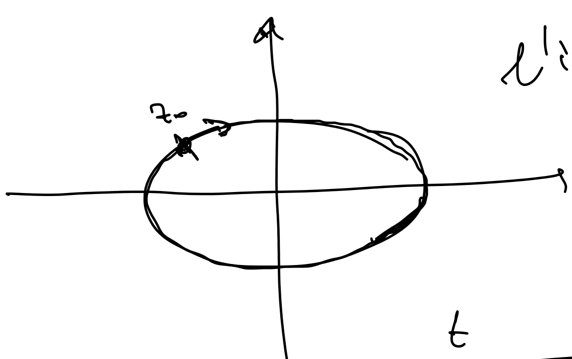


t molto piccoli e positivi appartengono a J

Infatti: $z(t) = z(0) + \dot{z}(0)\,t + o(t)$
$t>0$

$$= z_0 + \underbrace{\underset{\neq 0}{\dot{z}(0)}\;\underset{>0}{t}}_{\neq 0}\;(1+o(1))$$

Sia $\underline{T := \sup J}$. $\in \underline{(0,+\infty]}$



l'idea è che T è il periodo $z(t)$. ($T \in (0,+\infty)$)

(3) Sia $\ell(t) := \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(s)+\dot{y}(s)^2}\,ds \in (0,L]$

per $0<t\leq T$ $\qquad \ell(\Gamma_{or.}(z_0, z(t)))$

dove $L = \ell(\mathcal{E}_c)$

Poiché $\dot{z}(s) > 0 \Rightarrow \ell(t)$ è strett. crescente.

T. funz. monotone $\Rightarrow \quad \exists \lim \ell(t) \in (0, L]$

$\underset{t \to T}{}$

(4) $\exists \lim_{t \to T} z(t) = \hat{z} \in \mathcal{E}_c$

Sia $t_n \nearrow T$ e facciamo vedere che $z(t_n) \to \hat{z}$.

Innanzitutto $\{z(t_n)\}$ è di Cauchy:

$m > n$.

$$\left| z(t_m) - z(t_n) \right| = \left| \underline{\int_{t_n}^{t_m} \dot{z}(s)\, ds} \right|$$

norma euclidea.

$$\leq \int_{t_n}^{t_m} \underline{|\dot{z}(s)|}\, ds < \int_{t_n}^{T} \underline{|\dot{z}(s)|}\, ds$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \implies \{z(t_n)\} \text{ è di Cauchy.}$$

$$\implies z(t_n) \to \hat{z} \in \mathcal{E}_c$$

Se $s_n \nearrow T$ per n grandi

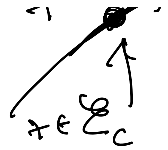
$$\underbrace{| z(t_n) - z(s_n) |}_{t_n > s_n} \leq \int_{s_n}^{t_n} |\dot{z}(s)|\, ds \to 0.$$

(5)* $\lim_{t \to T} z(t) = z_0$ e che $T < +\infty$.

Assumiamo, p.a., $\hat{z} \neq z_0$ e sia $\hat{z}(t) = \phi^t(\hat{z})$

$\boxed{f(z) = (y, -V'(x))}$

$\Gamma = \{ w(t) \mid t \in [0, L] \}$.

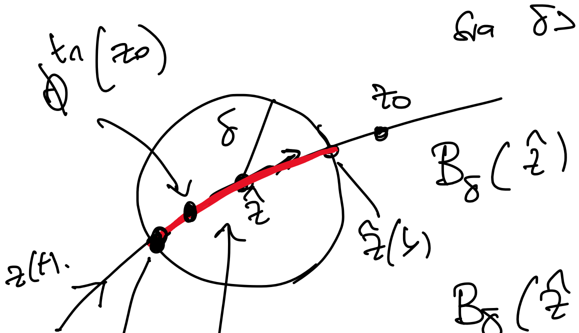


w induce un ordinamento in

$$z(t) \succ z(s) \iff t > s.$$

$\phi^t(z)$ e $z(t)$ inducono lo stesso ordinamento.

Sia $\delta > 0$ t.c. ..

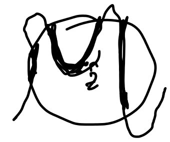


$B_\delta(\hat z)$ | $z_0 \notin B_\delta(\hat z)$

$B_\delta(\hat z) \cap \mathcal{E}_c$ sia connesso.

$$\boxed{\hat z(s) = \phi^s(\hat z)} = \hat z + v \cdot s + o(s)$$

$v = (\hat y, -V'(\hat x))$



NO.

$\hat z(a)$ in $\boxed{a < 0 < b}$

$$|\hat z(a) - \hat z| = |\hat z(b) - \hat z| = \delta$$

$t_1 < T$ e $a < 0$.

$\exists \quad 0 < t_1 < T$ con $0 < t_1 + a < T$

t.c. $\phi^{t_1}(z_0) = \hat z(a)$

$\delta \to 0 \iff a \to 0.$

Consideriamo la funzione

$$s \mapsto \phi^{t_1+s}(z_0) = \phi^s \circ \phi^{t_1}(z_0)$$

$$= \phi^s(\hat z(a)) = \phi^s(\phi^a(\hat z))$$

$s = -a$

$-a>0$ $\quad \phi^{t_1-a}(z_0) = \hat{z}$

$\Rightarrow \quad t_1 - a = T \in \mathbb{R}$

$\phi^T(z_0) = \hat{z}$

ma questa non può succedere perché altrimenti

$s>0$. $\quad \phi^{T+s}(z_0) \in B_\delta(\hat{z})$ per s piccoli

$\phi^{T+s}(z_0) \neq z_0$.

$T+s \in J$.

$\Rightarrow$ T non era un maggiorante.. contraddizione.

Quindi $\lim_{t \to T} \phi^t(z_0) = z_0$.

e con gli stessi argomenti dimostro che $T < +\infty$.