Introduzione

lunedì 28 settembre 2020 13:05

http://www.mat.uniroma3.it/users/chierchia/AM430_20_21/AM430_20_21.htm

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}, \quad f: \underset{\substack{\text{dominio} \\ \text{di } \mathbb{R}^n}}{\overset{x}{D}} \times \underset{\text{intervallo}}{\overset{t}{I}} \to \mathbb{R}^n$$

PROBLEMA DI CAUCHY (IVP.)

Es. 1 $(*)\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$ v data int. secondo Riemann

T.F.C. $\Longrightarrow \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds$, ...

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = x(t) - x_0$$

$\exists!$ sol. di $(*)$ di classe C^1 (se v è cont.)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds.$$

Es.2 Equi lin. del primo ordine

$$(**)\begin{cases} x' = a(t)\,x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad a, b \in C(I)$$

$$A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \quad \overset{\text{TFC}}{\Longrightarrow} \begin{cases} A' = a \\ A(t_0) = 0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo l'E.D per $e^{-A(t)}$:

$$\underbrace{x'e^{-A} - a e^{-A}}_{(x e^{-A})'} = e^{-A}\, b, \qquad \begin{matrix} A = A(t) \\ a = a(t) \\ b = b(t) \end{matrix}$$

$$(xe^{-A})' = x'e^{-A} + x(e^{-A})' = x'e^{-A} - x a e^{-A}$$

$$(xe^{-A})' = e^{-A}\, b$$

Integrando tra t_0 e t:

$$x(t)e^{-A(t)} - x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\, b(s)\,ds$$

$$\boxed{x(t) = e^{A(t)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t) - A(s)}\, b(s)\,ds} \longleftarrow$$

l'unica soluzione di $(**)$.

Esercizio $\begin{cases} x' = -x + \sin t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$a(t) = -1 \qquad A(t) = -\int_0^t ds = -t$

$$x(t) = e^{-t} x_0 + \int_0^t e^{s-t} \sin s\,ds = e^{-t} x_0 + e^{-t} \int_0^t e^{s} \sin s\,ds$$

$$= e^{-t} x_0 + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

(controllare!)

$$x_\infty(t) := \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

$|x(t) - x_\infty(t)| \longrightarrow 0$ con velocità esponenziale.

ES. 3 EQUI DEL PRIMO ORDINE A "VARIABILI SEPARABILI"

I e J due intervalli, $x \in J \mapsto f(x)$

$f \in C(J)$ e $f \neq 0$ su J. $t_0 \in I$, $x_0 \in J$.
$g \in C(I)$.

$$(***) \begin{cases} x' = f(x)\, g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad x(t_0) = x_0 \in J, \ f(x_0) \neq 0$$

$$\frac{x'}{f(x)} = g(t) \qquad (\text{se } x(t) \in J)$$

cambio di variabili

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'}{f(x)}\, dt = G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \in C^1(I).$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)}$$

$$F(x; x_0) := \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}, \quad F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$$

$\Rightarrow$ F è invertibile! Con inversa F^{-1}
$x \to F(x; x_0)$

$$F(x(t); x_0) = G(t)$$

$$\boxed{x(t) = F^{-1} \circ G(t)}$$

Unica soluzione durevole di $(***)$.

N.B. $x(t) \in J$. È chiaro che per $|t - t_0| \leq \delta$ questo è sempre vero per δ piccolo.

$\Rightarrow$ Quanto possiamo estendere la soluzione?
$\Rightarrow$ Qual è "l'intervallo di esistenza" della soluzione?

Esempio esplicito $f(x) = x^2$ $(f(0) = 0)$

$$(1) \begin{cases} x' = x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad x_0 \neq 0 \qquad \left(\begin{array}{l} x_0 = 0,\ x(t) \equiv 0 \text{ è sol. di } (1) \\ \text{che esiste } \forall t. \end{array} \right)$$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = s \qquad \frac{1}{x_0} - s = \frac{1}{x}$$

$$x = F^{-1}(s) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - s}, \qquad G(t) = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0$$

$$x(t) = F^{-1} \circ G(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + t_0 - t} = \frac{1}{t_0 - t + \frac{1}{x_0}} = -\frac{1}{t - T}$$

$I(x_0;t_0)$ = intervallo massimale di $\exists$ della soluzione di (1)

$$= \begin{cases} (-\infty, T) & \text{se } x_0>0 \\ (T, +\infty) & \text{se } x_0<0 \end{cases} \quad \text{dove } T = t_0 + \frac{1}{x_0}$$

singolarità per $x(t)$

Nel caso $x_0=0$, una soluzione ovvia è $x(t)\equiv 0$;
Ma questa soluzione è l'unica soluzione di (1)?

Lemma Siano $t\in I \to x_i(t) \in C^1$, $i=1,2$, soluzioni di (1). Allora $x_1(t)\equiv x_2(t)$, $\forall t\in I$.

Dim. $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$$\begin{cases} y' = x_1' - x_2' = x_1^2 - x_2^2 = \underbrace{(x_1+x_2)}_{\in C(I)}\cdot y =: a(t)\, y \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = a(t)y + 0 \\ y(t_0)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow y(t)\equiv 0. \quad \blacksquare$$

Esempio:

$$(2) \begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(0) = 0. \end{cases} \qquad x\in\mathbb{R} \longrightarrow x^{2/3} \in [0,+\infty)$$

Ovviamente $x_0(t)\equiv 0$ è soluzione, $\forall t$.

Cerchiamo soluzioni della forma $x(t) = (t-\tau)^\alpha \cdot c$

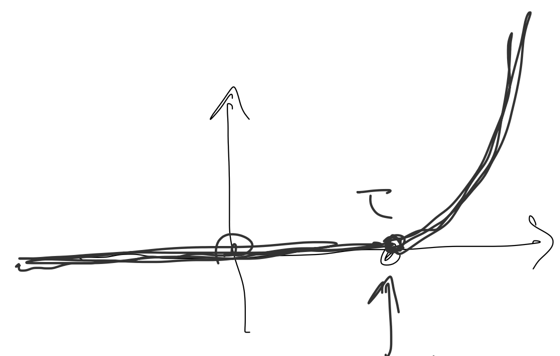
Proviamo a calcolare ...

$$x' = c\alpha (t-\tau)^{\alpha-1} = (t-\tau)^{\frac{2}{3}\alpha} c^{2/3}$$

$$\begin{cases} \alpha - 1 = \frac{2}{3}\alpha, & \frac{\alpha}{3} = 1, \quad \underline{\underline{\alpha = 3}} \\ c\alpha = c^{2/3}, & c^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\alpha}, \quad c = \frac{1}{\alpha^3} = \frac{1}{27} \end{cases}$$

Quindi soluzioni di $x' = x^{2/3}$ sono date

$$x_\tau(t) := \frac{(t-\tau)^3}{27}$$



$(x_\tau^+)''(\tau) = 0$

$$\begin{cases} x_\tau^+(t) := \begin{cases} 0 & t \le \tau \\ \frac{(t-\tau)^3}{27} & t > \tau \end{cases} & \tau \ge 0 \\ x_\tau^-(t) := \begin{cases} 0 & t \ge \tau \\ \frac{(t-\tau)^3}{27} & t < \tau \end{cases} & \tau < 0 \end{cases}$$

sono soluzioni di classe $C^2(\mathbb{R})$ di (2).

MANCANZA DI <u>UNICITÀ</u>.

(EN) $\boxed{m\ddot{x} = f(x)}$ FORZA = m x accelerazione.

$(x \in \mathbb{R})$

forze conservative (non c'è dipendenza dal tempo esplicita)

$$\left(\dot{x} := x'(t) = \frac{dx}{dt} \right).$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}f(x) \qquad F(x) = F(x; x_0) := \int_{x_0}^{x} f(y)\,dy$$

$$\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right)^{\cdot} \qquad (F(x))^{\cdot} \qquad F' = f(x)$$

$$F'(x)\cdot\dot{x}$$

$$(EN) \iff \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2 - F(x)}_{E(t)}\Big) = 0 \implies E(t) \equiv E(t_0) \quad (\text{cost.})$$

Con $E(t) = T + U$, $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U(x) = -F(x)$

EN. CIN. EN. POT.

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 - F(x) = \underline{E_0} = \frac{m}{2} v_0^2 - F(x_0) \longleftarrow \underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2}_{\geq 0} + U(x) = E_0$$

v_0 ← $\underline{\dot{x}(t_0)}$, x_0 ← $\underline{x(t_0)}$

$$\Downarrow$$

$$E_0 \geq U(x)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left(F(x) + E_0\right) = \frac{2}{m}\left(\underbrace{E_0 - U(x)}_{\geq 0}\right)$$

$$\underline{\dot{x} = \sigma\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(x)\right)}}\,, \qquad \underline{\sigma = \operatorname{sgn}(v_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \Phi^{-1}\left(\sigma\cdot(t - t_0)\right) \quad \text{dove} \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_0 - U(\xi)\right)}}$$