venerdì 30 ottobre 2020 16:14

Equi del 2° ordine lineari

$$\ddot{x} + p_1(t)\,\dot{x} + p_0(t)\,x = h(t) \qquad (1)$$

Assumiamo p_i e h continue su I intervallo

$$L[x] \qquad L : x \in C^2 \to Lx \in C$$

$$(Lx)(t) = \ddot{x} + p_1(t)\,\dot{x} + p_0\,x$$

(1) è equivalente a

$$Lx = h. \qquad (2)$$

Nel caso $h=0$, l'equazione diventa omogenea

$$Lx = 0. \qquad (3)$$

Oss. (i) L è un operatore lineare su $C^2(I)$

$$x, y \in C^2(I) \Rightarrow L(ax+by) = a\,Lx + b\,Ly$$

(ii) se x, y sono soluzioni di (3) e z è una soluzione di (2) chiaramente

$$c_1 x + c_2 y + z \text{ è soluzione di } (2)$$

$$\begin{cases} Lx = h \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

(iii) $u := (\dot{x}, x)$

$$\dot{u}_1 = \ddot{x} = -p_1\dot{x} - p_0 x + h$$

$\dot{u}_2 = u_1$

$\dot{u} = f(u,t) = A(t)u + F(t)$

con $A(t) = \begin{pmatrix} -p_1(t) & -p_0(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad F(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} -p_1 & -p_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + F = \begin{pmatrix} -p_1 u_1 - p_0 u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dal teorema di $\exists$ massimale segue $\exists !$ soluzione di (PC) con intervallo di $\exists$ max $= I$.

Def. Due funzioni continue u e v su I sono linearmente indipendenti se $\underline{c_1 u + c_2 v = 0} \Leftrightarrow c_1 = 0 = c_2$

(in $C(I)$ come spazio vettoriale

$(\underbrace{c_1 u + c_2 v}) (t) := c_1 u(t) + c_2 v(t)$

$u = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0, \forall\, t \in I$.)

Oss. u e v sono linearmente dipendenti e $v \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \lambda \neq 0 \mid \underline{u = \lambda v}$

(u, v lin. dip. $\Leftrightarrow \exists\, (c_1, c_2) \neq (0,0)$ t.c.

$c_1 u + c_2 v = 0$

se $c_1 \neq 0$. $\quad u + \frac{c_2}{c_1} v = 0 \quad u = \lambda v \quad \lambda = -\frac{c_2}{c_1}$

se $c_1 = 0$, $\quad c_2 v = 0 \Rightarrow v = 0$

$\rightarrow \forall u$, u e 0 sono lin. dip. $\quad 0 \cdot u + 1 \cdot 0 = 0$.

Def. Date $u, v \in C^1(I)$ definiamo il WRONSKIANO di u e v come

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} = u\dot{v} - \dot{u}v$$

Oss. $u, v \in C^1$ sono lin. dip. $\Leftrightarrow W = 0$ su I.

Infatti, se $W = 0 \iff c_1\begin{pmatrix} u \\ \dot u\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v \\ \dot v\end{pmatrix} = 0.$

$\Rightarrow \quad c_1 u + c_2 v = 0.$

Viceversa se u, v lin dip. $\Rightarrow$ $\exists\, c_1 \, e \, c_2 \; ((c_1, c_2) \neq (0,0))$ $c_1 u + c_2 v = 0$

$\Rightarrow \quad c_1 \dot u + c_2 \dot v = 0.$

Oss. se $\underset{\underset{W(u,v;t_0)}{\shortparallel}}{W(t_0)} \neq 0 \Rightarrow$ u e v sono lin. indip in I.

$\boxed{\text{Oss.}}$ u e v sono tali che $\underline{Lu = 0 = Lv}$ e
e $W(u,v;t_0) = 0 \Rightarrow$ $\underline{u \text{ e } v \text{ sono lin. dip.}}$

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} u(t_0) & v(t_0) \\ \dot u(t_0) & \dot v(t_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \quad \text{con } (c_1, c_2) \neq (0,0).$$

$\rightarrow \quad c_1 u(t_0) + c_2 v(t_0) = 0$
$\quad\;\; c_1 \dot u(t_0) + c_2 \dot v(t_0) = 0.$

$$x(t) := c_1 u(t) + c_2 v(t), \quad \begin{cases} Lx = 0. \\ x(t_0) = 0 \\ \dot x(t_0) = 0. \end{cases}$$

$\overset{\exists!}{\Longrightarrow} \quad x(t) = 0, \forall t \in I \iff$ u e v sono lin. dip.

$\underline{\text{Oss.}}$ u e v soluzioni di $Lx = 0$ sono lin. indip $\iff W(t) \neq 0, \forall t \iff \underline{\exists\, t_0 \,|\, W(t_0) \neq 0}.$

$\underline{\text{Teorema di Abel}}$. Siano u e v soluzioni di $Lx = 0$.

$(L = \underline{D_t^2 + p_1 D_t + p_0}) \Rightarrow W(t) := W(u,v;t)$ soddisfa

$$\underline{\dot W + p_1 W = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{W(t) = c\, e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(s)\,ds}} \quad (t_0 \in I).$$

Oss. se $p_1 = 0 \Rightarrow W(t) \equiv \text{cost.}$

$L = -D_t^2 + p_0$ è l'operatore di Schrödinger o operatore di Hill

DIM. $\dot{W} = (\underbrace{u\dot{v} - \dot{u}v})^{\cdot} =$

$= u\ddot{v} - \ddot{u}v = u(-p_1\dot{v} - \cancel{p_0 v}) - v(-p_1\dot{u} - \cancel{p_0 u})$

$= p_1(\dot{u}v - u\dot{v}) = -p_1 W$. $\blacksquare$

Oss. Il Wronskiano di due soluzioni di $Lx = 0$ o è identicamente nullo o non è mai nullo

(o $W(t) = 0, \forall t$ oppure $W(t) \neq 0, \forall t$)

Def. Due soluzioni u, v di $Lx = 0$ si chiamano soluzioni fondamentali se sono linearmente indip.

Se u e v sono soluzioni fondamentali di $Lx = 0$ allora ogni soluzione di $Lx = 0$ è una comb. lin. di u e v.

Infatti: sia $x(t)$ una soluzione di $Lz = 0$.

$t_0 \in I$. $x_0 := x(t_0)$ e $y_0 := \dot{x}(t_0)$.

$W(u, v; t_0) \neq 0$. $\begin{pmatrix} u(t_0) & v(t_0) \\ \dot{u}(t_0) & \dot{v}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\exists!$ soluzione (c_1, c_2)

Ma allora $x(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t), \forall t$

risolvono entrambe $Lz = 0$ e hanno gli stessi dati iniziali

$\xRightarrow[\text{unicità}]{} x(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t), \forall t$.

Quindi $V := \{v \mid Lv = 0\}$.

... spazio vettoriale di dimensione $\underline{2}$

è uno spazio vett...

e una base è una qualunque coppia di soluzioni fondamentali.

$$\left(\begin{cases} Lx = 0 \\ x(t_0) = 1 \\ \dot{x}(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ \dot{y}(t_0) = 1 \end{cases}\right)$$

$$W(x,y,t_0) = x(t_0)\,\dot{y}(t_0) - \dot{x}(t_0)\,y(t_0)$$

$$= 1.$$

Def. La soluzione generale di $Lx = 0$.

è una famiglia di funzioni C^2 $\phi(t; c_1, c_2)$

t.c. $\forall\, c_1, c_2$, $t \to \phi(t; c_1, c_2)$ è soluzione di $Lx = 0$

e $\forall\, x \mid Lx = 0\ \exists\, c_1, c_2 \mid x = \phi(t; c_1, c_2)$.

Ad esempio se u, v sono soluzioni fondamentali

allora $\phi(t; c_1, c_2) = c_1 u + c_2 v$.

Es. del § 6.5.1.

Es. 5 $x_1 = \sin^2 t$ e $x_2 = \cos^2 t$ sono lin. indip..

Assumiamo $0 = a \sin^2 t + b \cos^2 t$, $\forall t$

$\Rightarrow b = 0$ ($t = 0$) ; $t = \frac{\pi}{2}$, $a = 0$.

Es 9. Siano $p \neq q$ (numeri) allora $x_1 = t^p$ e $x_2 = t^q$

non possono essere soluzioni di $Lx = 0$. ($L = D_t^2 + p_1 D_t + p_0$)

Chiaramente x_1 e x_2 sono linearmente indip. ✓

$\dot{x} = A(t)\, x \qquad x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

$A(t) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, continua in I, cioè $A_{ij}(t)$ è cont.

$A = (A_{ij})_{ij}$