lunedì 30 novembre 2020 16:16

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) \quad , \quad V \in C^2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{E}_c := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y^2 = 2\,(c - \overline{V(x)})}_{E(x,y)=c} \}$$

Se $\mathcal{E}_c$ è una curva regolare che non contiene equilibri ($y_0=0$, $V'(x_0)=0$) è una curva simmetrica rispetto all'asse delle x e si deve avere $V(x) \le c$

e se $V(x) = c \Rightarrow y = 0 \Rightarrow V'(x) \neq 0$

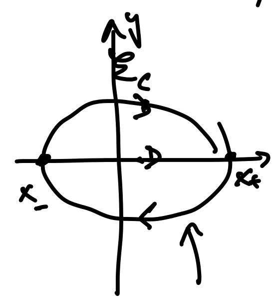
non cont. equilibrio

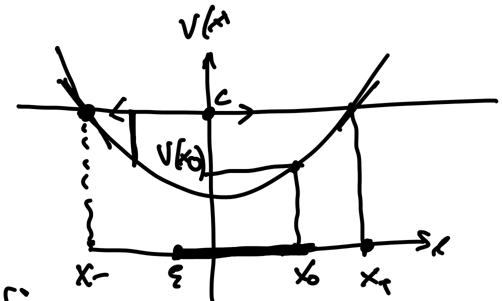
se $V(x) < c \Rightarrow (x, \pm\sqrt{2(c - V(x))}) \in \mathcal{E}_c$.

Supponiamo che $\mathcal{E}_c \neq \emptyset$, non cont. equilibrio e sia una curva regolare chiusa (non ci sono autointersezioni) e

non faccio grafici

Sia $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}_c$ t.c. $V(x_0) < c$





Sia

$$x_- := \inf\{ \xi \mid V(x) < c \ \forall\, \xi \le x \le x_0 \}$$

$$x_+ = \sup\{ \xi \mid V(x) < c \ \forall\, x_0 \le x \le \xi \}$$

Per definizione $\Rightarrow V(x_\pm) = c$ (per teo. permanenza del segno e definizione di $x_\pm$)

necessariamente $V'(x_\pm) \neq 0$ (altrimenti sarebbe un equilibrio)

ℓ necessariamente $V'(x_\pm) \neq 0$

e in realtà $V'(x_-) < 0 < V'(x_+)$

$\left(V'(x_+) \neq 0 \Rightarrow V'(x_+) > 0 . \right)$

$$\frac{T}{2} = \int_0^{T/2} dt \underset{t=t(x)}{=} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{y} = \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(c-V(x))}}$$

$\dot{x} = y \ , \ \frac{dx}{y} = dt$

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(c-V(x))}}$$

Nota: l'integrale è un integrale improprio conv.

per $x \sim x_\pm$, $c - V(x) = \cancel{c} - \left(\cancel{V}(x_\pm) + V'(x_\pm)(x - x_\pm) + o(x - x_\pm) \right)$

$$= \underbrace{V'(x_\pm)\,(x_\pm - x)} + o(x - x_\pm)$$

$$= |V'(x_\pm)|\,(1 + o(1))\,|x - x_\pm|$$

lato x_- : $\underbrace{-V'(x_-)}_{>0} (x - x_-)$, $x - x_- \to 0$

x_+ : $\underbrace{V'(x_+)}_{>0} \underbrace{(x_+ - x)}_{>0}$.

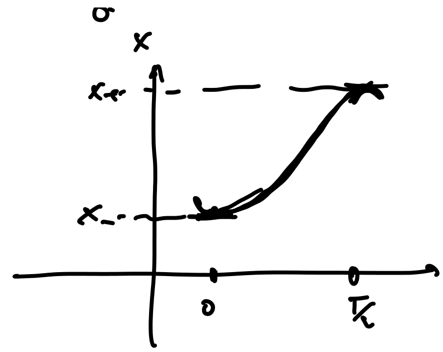
$$2 \int_{x_-}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2(c - V(x))}} \sim \text{cost.} \int_{x_-}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{|x - x_-|}}$$

$$\sim \int_0^{\varepsilon} \frac{dz}{\sqrt{z}} \sim 2\sqrt{\varepsilon}$$

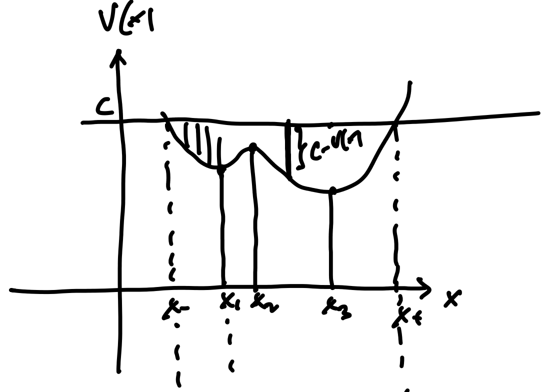
NB

$$t(x) := \int_{x_-}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2(c - V(x))}}$$ è invertibile su (x_-, x_+)

$$t'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(\underbrace{c - V(x)}_{>0})}} \Leftrightarrow$$ $x(t)$ è l'inversa



Attenzione ci sono 3 grafici rilevanti



$$\dot{x} = y = \pm\sqrt{2\,(c - V(x))}$$

Figura 1 grafico di V.

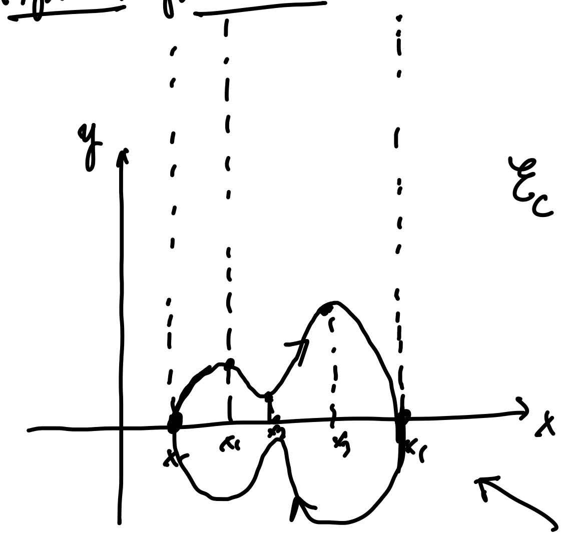
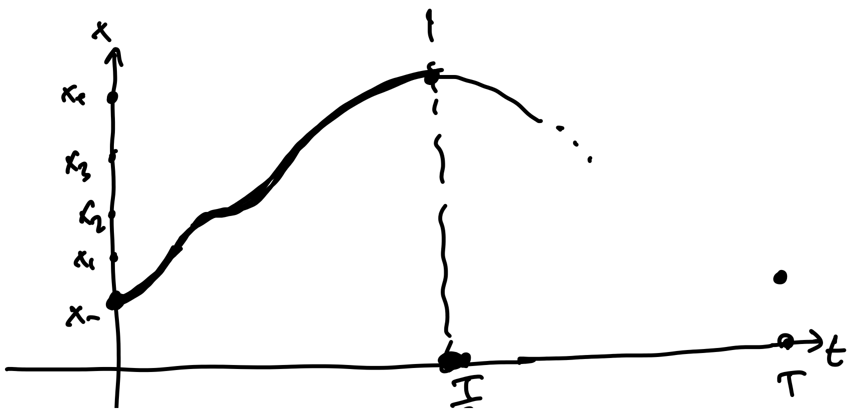


Figura 2 curva $\mathcal{E}_c$



1 Figura 3. grafico di 2 $t \to x(t)$

$t=0$

$x(0) = x_-$

$x(\frac{T}{2}) = x_+$

ESEMPIO oscillatore armonico non lineare

$$\ddot{x} + \omega^2 x - x^3 = 0, \quad V(x) := \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \frac{x^4}{4} \quad (\text{con } \omega > 0)$$

$$\ddot{x} + V'(x) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases}$$

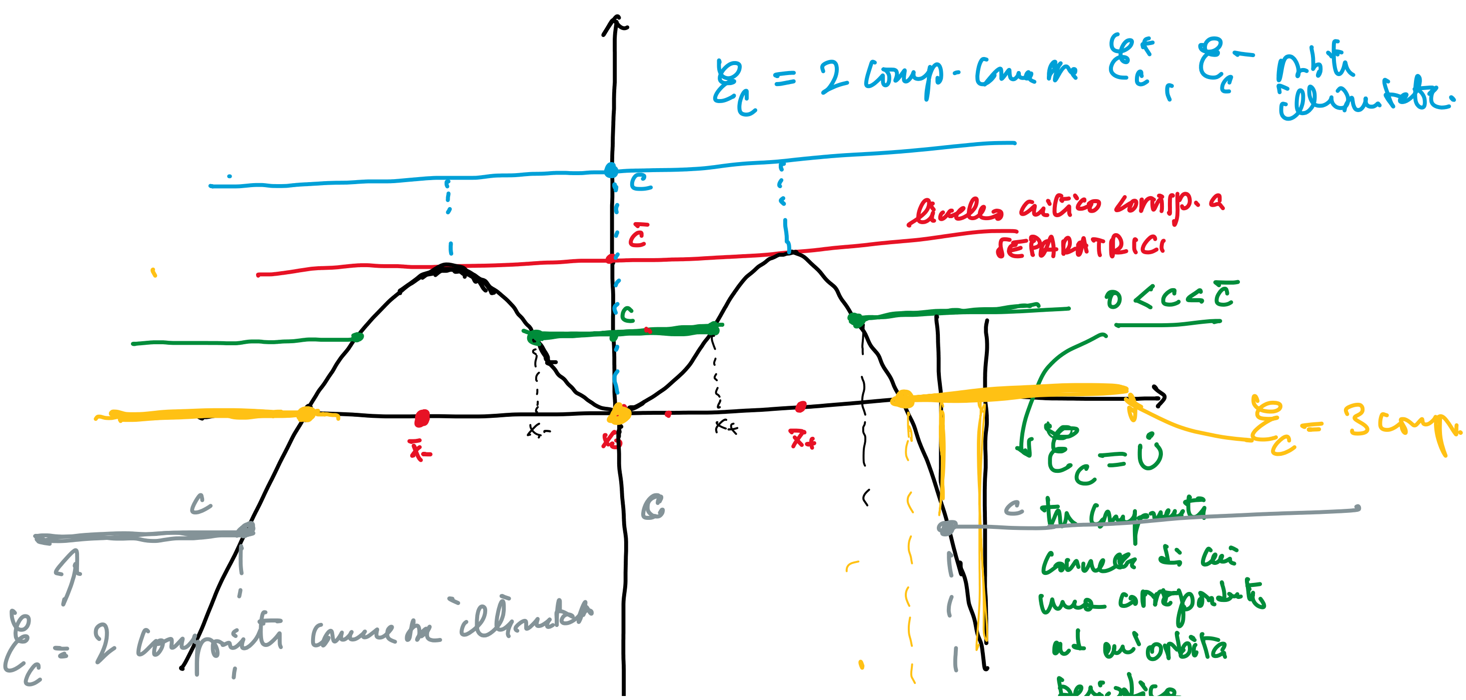
$$V(x) = \frac{x^2}{2}\left(\omega^2 - \frac{x^2}{2}\right)$$

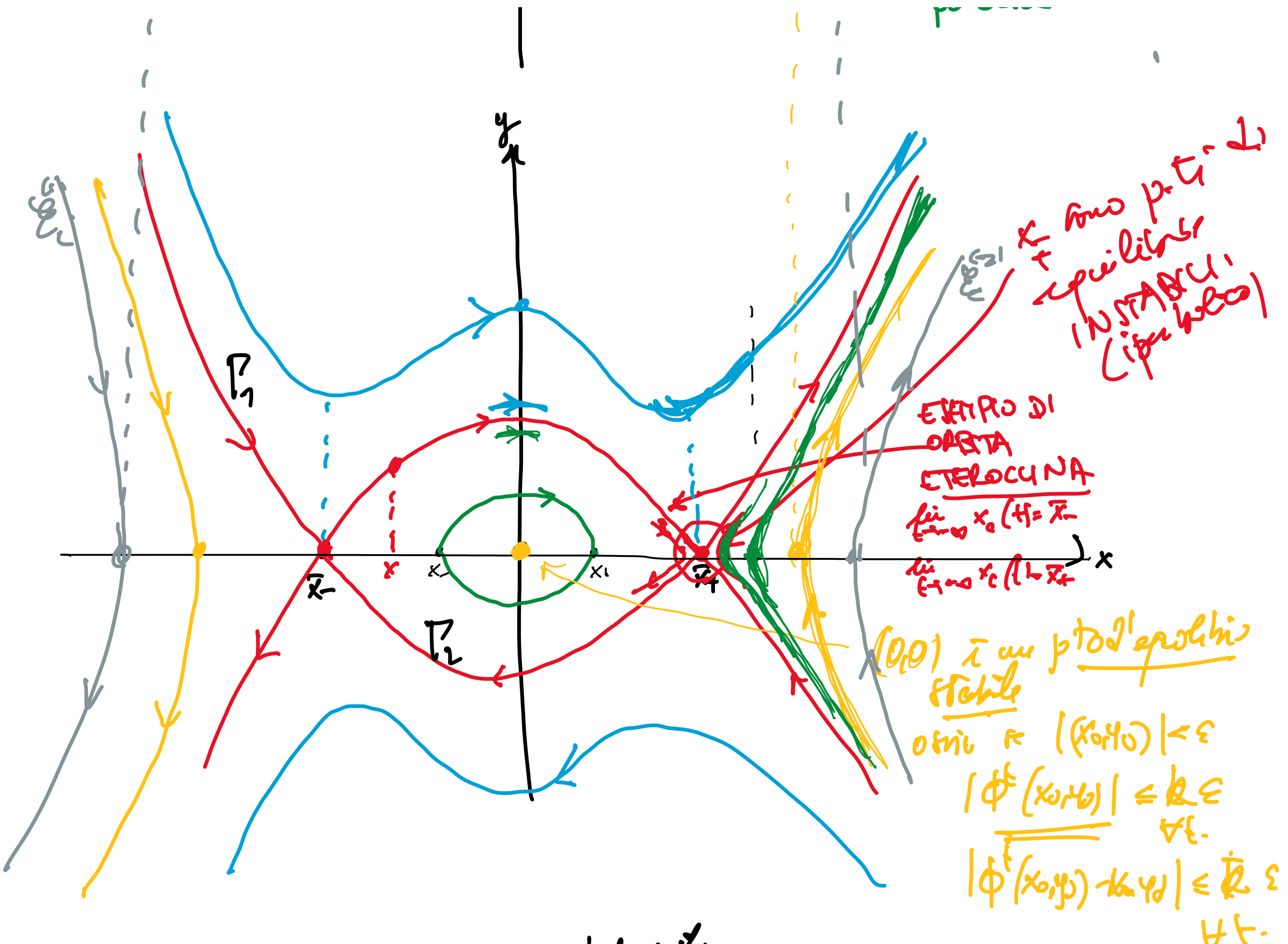
$V(x) = 0 \iff x = x_0 := 0$ radice doppia

$x = \pm\sqrt{2}\,\omega$

$$V'(x) = \omega^2 x - x^3 = 0 = x(\omega^2 - x^2), \quad x = \pm\omega = \bar{x}_\pm$$

$$\bar{c} := V(\bar{x}_\pm) = \frac{\omega^4}{4}$$





le orbite periodiche del sistema sono $\phi^t(x_0,y_0)$ con $x_- \le x_0 \le x_+$ e $E(x_0,y_0) = c \in \left(0, \frac{\omega^6}{k}\right)$.

$x_\pm$ sono p.ti di equilibrio instabile (iperbolici)

le loro varietà stabili ed instabili

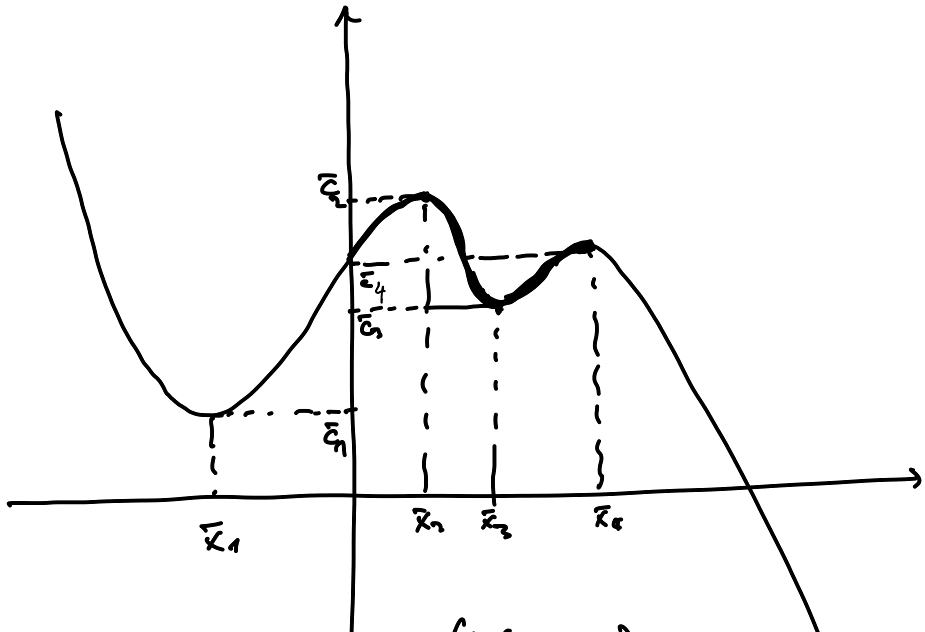
$$W^\pm(x_\pm) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \phi^t(x_\pm) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} x_\pm\}.$$

(+ = u instabile
 − = s stabile)

$$W^+((\bar{x}_-,0)) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{(\bar{x}_-,0)\}.$$

Es. Discutere il ritratto di fase del sistema

$\ddot{x} + V'(x) = 0$ con $V(x)$ come in figura



$V'(\bar{x}_k) = 0 \ \forall k, \ (V''(\bar{x}_k) \neq 0)$