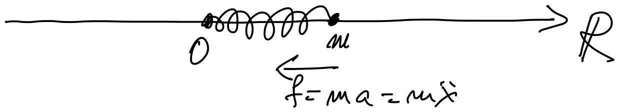
Lezione

mercoledì 30 settembre 2020 16:21

$$m\ddot{x} = \overbrace{-kx}^{f}, \quad k>0$$

cost. di elasticità della molla



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

$$E(t) := m\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad U(x) := \frac{kx^2}{2}, \quad -U' = f$$

Oss. La soluzione del problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases} \qquad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

è unica.

Dim. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni di (1)
anche $z(t) := x_1(t) - x_2(t)$ è soluz. dell'ED.
con dati iniziali

$$z(t_0) = 0, \quad \dot{z}(t_0) = 0$$

$$E_z(t) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + k\frac{z^2}{2} = E_z(t_0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z^2(t) \equiv 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x_1(t) \equiv x_2(t).$$

C.V.D.

Due soluzioni "indipendenti" dell'ED $\ddot{x} = -\omega^2 x$

sono date $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, $\sin(\omega t + \alpha)$, $\cos(\omega t + \beta$

$$x(t) = a\cos(\omega(t-t_0)) + b\sin(\omega(t-t_0))$$

$$x(t_0) = a, \quad \dot{x}(t) = -a\omega\sin(\omega(t-t_0)) + b\omega\cos(\omega(t-t$$

$$\dot{x}(t_0) = b\omega, \quad b = \frac{v}{\omega} \quad a = x_0$$

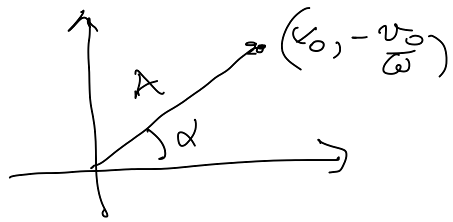
La soluzione di (1) è data da

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega(t-t_0)) + \frac{v}{\omega}\sin(\omega(t-t_0))}.$$

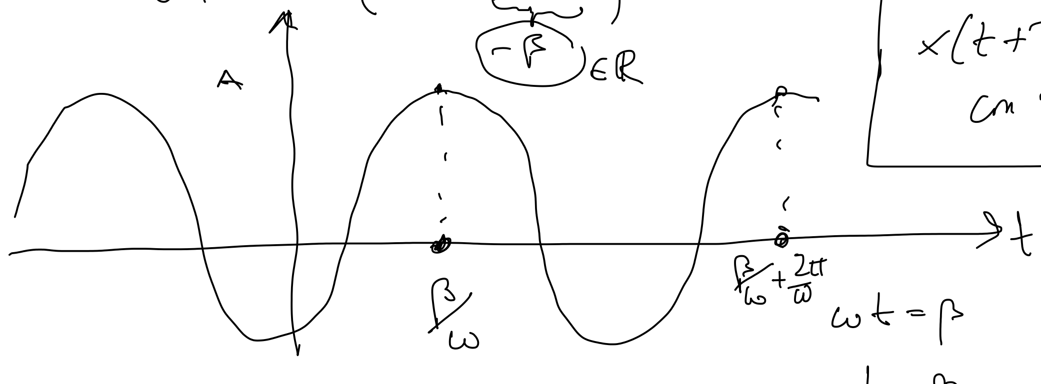
$$= \underline{A}\cos(\omega(t-t_0) + \underline{\alpha})$$

$x_0 = x(t_0) = A\cos\alpha$, $v_0 = \dot{x}(t_0) = -A\omega\sin\alpha$

$$\begin{cases} A\cos\alpha = x_0 \\ A\sin\alpha = -\dfrac{v_0}{\omega} \end{cases}$$



$$x(t) = A\cos(\omega t + \underbrace{\alpha - \omega t_0}_{-\beta}) \quad \in \mathbb{R}$$



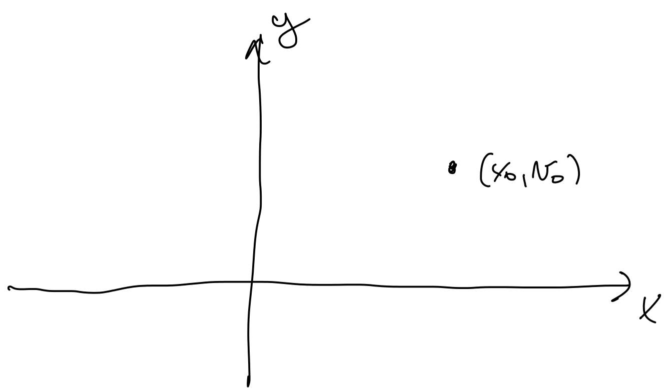
$$\boxed{\begin{array}{c} x(t+T) = x(t) \\ \text{con } T = \frac{2\pi}{\omega} \end{array}}$$

$\omega t = \beta$

$t = \frac{\beta}{\omega}$

$t = \frac{\beta}{\omega} = \frac{\omega t_0 - \alpha}{\omega} = t_0 - \frac{\alpha}{\omega}$

Altro punto di vista interessante è tramite il cosiddetto <u>SPAZIO DELLE FASI</u>



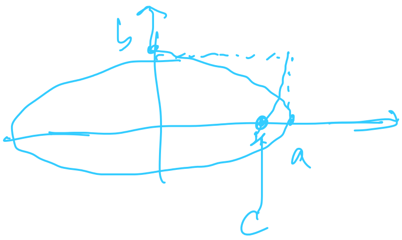
$$\underbrace{E = m\frac{y^2}{2} + k\frac{x^2}{2} = E_0}$$

$(y = \dot{x})$.

$$\frac{y^2}{2k} + \frac{x^2}{2m} = \frac{E_0}{km}$$

$$\frac{y^2}{2E_0/m} + \frac{x^2}{2E_0/k} = 1$$

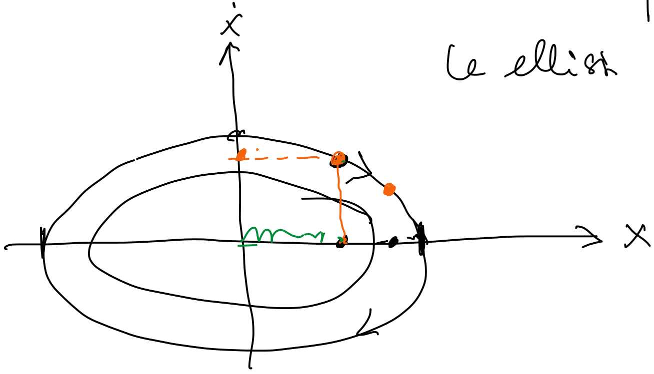
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



descrive nel piano (x,y) una ellisse

$$\left(\frac{x}{\underbrace{\sqrt{2E_0/k}}_{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\underbrace{\sqrt{2E_0/m}}_{b}}\right)^2 = 1$$

Domanda: in che verso è percorsa l'ellisse?



Le ellissi sono percorse in senso orario.

Studiamo $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

ED 2° ord. lineare, omog. a coeff. costanti.

$$(2)\quad \begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Oss. (i) Una soluzione di (2) è una funzione C^2.

Ma infatti è C^∞.

$$\dddot{x} = -a\ddot{x} - b\dot{x}, \quad \text{etc.} \qquad x^{(n)} = \underbrace{\Phi_n(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})}_{\in C}$$

(ii) se x_1 e x_2 sono soluz. dell'ED $\Rightarrow$ $\alpha x_1 + \beta x_2$ lo è.

(iii) se $x(t)$ è sol. dell'ED $\Rightarrow$ $\underline{x(t-s)}$ lo è.

Quindi se pongo $\tilde{x}(t) := x(t+t_0)$

$$\tilde{x}(0) = x(t_0)$$
$$\dot{\tilde{x}}(0) = \dot{x}(t_0).$$

$\Longrightarrow$ $\tilde{x}$ è sol. del P.C.

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}} + a\dot{\tilde{x}} + b\tilde{x} = 0 \\ \tilde{x}(0) = x_0 \\ \dot{\tilde{x}}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \bar{x}(t-t_0)$$

Lemma Sia I un intervallo che contiene 0 e siano x_1 e x_2 sol. di

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Allora $x_1(t) = x_2(t)$, $\forall t \in I$.

Dim. Basta dim che l'unica soluzione di (3) $\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

è $x(t) \equiv 0$.

Supponiamo, p.a., che $t \in I \mapsto x(t)$ sia sol. di (3) ma non identicamente nulla. Cioè $\exists\, t_1 \in I \mid x(t_1) \neq 0$.

$t_1 \neq 0$. Supponiamo $t_1 > 0$ ($t_1 < 0$ si tratta in modo analogo).

Sia $D := \{ \underset{t \in I}{t \geq 0} \mid x(s) = 0 \ \forall\ 0 \leq s \leq t \}$

$(0 \in D)$ D è limitato. $T := \sup D$

t_1 è un maggiorante $\Rightarrow D \subseteq I$

$\Rightarrow x(T) = 0$

La funzione $y = \dot{x}$ verifica

$$\begin{cases} \dot{y} = -ay - b\underline{x(t)} \\ y(T) = 0 \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{l} x(t) = 0 \quad \forall\ 0 \leq t \leq T \\ \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \ \forall\ 0 \leq t \leq T \end{array}$$

$$y(\tau) = \underbrace{\dot{x}(\tau)}\ = -b \int_T^\tau \underbrace{e^{a(s-\tau)} x(s)\, ds}, \quad \forall \tau \in I.$$

Se $b = 0 \Rightarrow \dot{x}(\tau) = 0$, $\forall \tau \Rightarrow x(\tau) = \text{cost} = 0 = x(0)$

contradd.

Quindi $b \neq 0$. Integriamo tra T e $t > T$ $(t \in I)$

(4) $\quad x(t) - \underset{=0}{x(T)} = -b \int_T^t \left(\int_T^\tau \underline{e^{a(s-\tau)}}\ \underline{\underline{x(s)}}\, ds \right) d\tau.$

Sia $\varepsilon>0$ / $\underline{T+\varepsilon<t_1}$ e sia $M_\varepsilon := \sup_{T\le t\le T+\varepsilon} |x(t)|$

$M_\varepsilon>0$, $\forall\, \varepsilon$ per definizione di T.
$t\in[T,T+\varepsilon]$

Da (4) segue che $M_\varepsilon \le |b| M_\varepsilon e^{|a|\varepsilon} \int_T^t \int_T^\tau ds\, d\tau$.

$|e^z| \le e^{|z|}$

$\int_T^t (\tau-T)\, d\tau = \frac{(t-T)^2}{2} \le \frac{\varepsilon^2}{2}$, $t\in[T,$

$M_\varepsilon \le c\, M_\varepsilon\, \varepsilon^2$, $C=\frac{|b|}{2} e^{|a|\varepsilon}>0$

$1 \le c\,\varepsilon^2$, $c\,\varepsilon^2<1$

$\varepsilon^2 < \frac{2}{|b|} e^{-|a|\varepsilon}$

$\le M_\varepsilon\, \underbrace{\varepsilon^2 \cdot \frac{|b|}{2} e^{|a|(t_1-T)}}_{<1}$

Contradd. se $\varepsilon < \left(\frac{2}{|b|} e^{-|a|(t_1-T)}\right)^{\frac12}$. C. V.