venerdì 4 dicembre 2020 15:01

$E(x,y) = \frac{y^2}{2} - x^3$

$\nabla E = 0 \iff y=0 \quad e \; x=0$

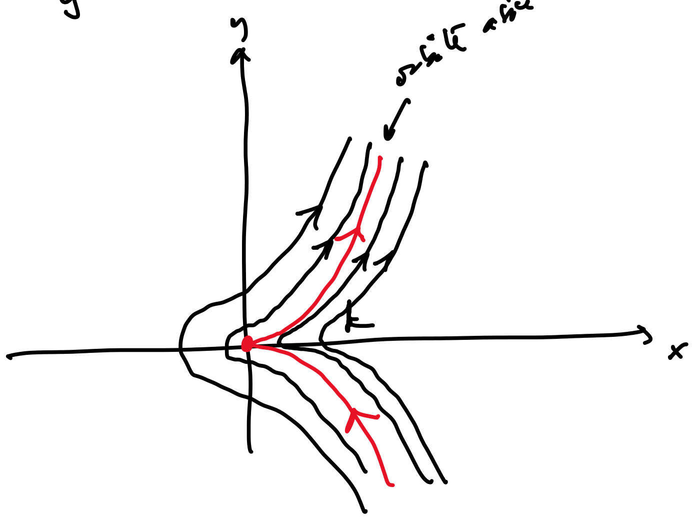
$(x_0,y_0) = (0,0)$ unico pto critico di mappa critica

$c_0 := (0,0)$

$\mathcal{E}_0 = \{ E = 0 \}.$

$\frac{y^2}{2} = x^3 \implies x \geq 0$

$y = \pm \sqrt{2} \, x^{3/2}$



Dipendenza regolare dai dati (parametri) iniziali.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t;\alpha) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x \in D := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \bar{x}| \leq r \}$
$t \in I$ intervallo di $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$.
$\alpha \in A \subseteq \mathbb{R}^m$, A ap. con $\bar{A}$ limitata

La dipendenza da α può essere ricondotta alla dipendenza da dati iniziale

$\underset{\mathbb{R}^{n+m}}{z} = (x, \underset{m}{\alpha}) \quad F = (f, \underset{\mathbb{R}^m}{0}) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{cases} \dot{z} = F \\ z(t_0) = (x_0, \alpha_0) = z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad \dot{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha \equiv \text{cost} = \alpha_0$$

$$z(t) = (x(t), \alpha_0), \qquad x(t; x_0, \alpha_0)$$

Quindi se $z(t, z_0)$ è Lip. o C^1 rispetto a z_0 $\Longrightarrow$ $x(t, x_0, \alpha_0)$ è Lip. o C^1 rispetto (x_0, α_0).

Ricordiamo il lemma di Gronwall:

<u>Lemma Gronwall</u> I intervallo, $\delta \geq 0$, $L > 0$

$g \in C(I, [0, +\infty))$ e t_0:

$$g(t) \leq \delta + L \left| \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \right|, \quad \forall t \in I.$$

Allora,

$$g(t) \leq \delta e^{L|t - t_0|}, \quad \forall t \in I$$

Continuiamo il teorema

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad f \in C(D \times I, \mathbb{R}^n)$$

supponiamo

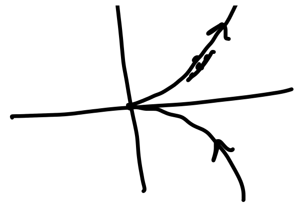
(i) f è unif. lip. in x:

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in D, \ \forall t \in I$$

(ii) $f \in C^1(D \times I, \mathbb{R}^n)$

(iii) $f \in C^k(D \times I, \mathbb{R}^n)$

Sia $\phi(t, x_0)$ l'unica soluzione di $(*)$.



Teo 1. Assumiamo (i). Allora, $x \in D \to \phi(t,x)$ è Lip. su D unif. in $t \in I$ con cost. di Lip e^{Lt} dove

$$L = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in D}} \frac{|f(x,t) - f(y,t)|}{|x-y|} .$$

Dim

$$\phi(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f(\phi(s,x),s)\, ds$$

$$\underbrace{|\phi(t,x) - \phi(t,x_0)|}_{g} = \left| x - x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(f(\phi(s,x),s) - f(\phi(s,x_0),s) \big)\, ds \right|$$

$$\le \underbrace{|x - x_0|}_{\delta} + L \left| \int_{t_0}^{t} |\phi(s,x) - \phi(s,x_0)|\, ds \right|$$

mod in $\mathbb{R}$ norma in $\mathbb{R}^n$

Gronwall $\Rightarrow$

$$|\phi(t,x) - \phi(t,x_0)| \le |x - x_0| \cdot e^{L(t-t_0)} \le |x-x_0| e^{LT}. \blacksquare$$

Prop 2 Se $f \in C^1(D \times I, \mathbb{R}^n) \Rightarrow \phi \in C^1(I \times D, D)$.

Inoltre, la Jacobiana di ϕ,

$$\Psi(t,x) := \phi_x(t,x) \quad \left(\Psi_{ij} := \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(t,x) \right)$$

verifica l'equazione matriciale lineare

$$\text{(EV)} \quad \begin{cases} \dot{\Psi} = \overbrace{f_x(\phi(t,x), t)}^{A(t) = A(t,x)}\, \Psi \\ \Psi(t_0) = I_n, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \left((f_x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

"Equazione variazionale".

Oss. Se $\phi \in C^1(I \times D, D)$

$$\dot\phi = f(\phi, t) \qquad \phi = \phi(t,x).$$

$$\begin{cases} (\phi_x)^{\cdot} = f_x(\phi,t)\,\phi_x \\ \phi_x(t_0) = I. \end{cases} \qquad \phi(t_0,x) = x.$$

$\Rightarrow$ $\phi_x(t,x)$ è la soluzione di (EV).

Dim. Prop 2

$t \to \phi(t,x)$ è C^1 $\quad \left(\dot\phi = f(\phi,t) \right)$ ✓

$x \to \phi(t,x)$ è C^1 $\iff$ $\exists$ una matrice $n\times n$ $B(t,x_0)$

t.c.
$$\frac{\phi(t,x) - \phi(t,x_0) - B(t,x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

e $\quad B(t,x_0) = \phi_x(t,x_0) = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}(t,x_0)$

$x_0 \to B(t,x_0)$ è continua.

Sia $\psi(t,x)$ la soluzione di (EV) e definiamo

$$\theta(t,x,x_0) := \frac{\phi(t,x) - \phi(t,x_0) - \psi(t,x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}, \quad x \neq x_0$$

Vogliamo dimostrare che $\lim_{x\to x_0} \theta(t,x,x_0) = 0.$ (1)

N.B. se $x \neq x_0$, $\theta(t_0,x,x_0) = x - x_0 - I_n(x-x_0) = 0$.
$= 0.$

Notazione
$\phi = \phi(t,x)$, $\quad \phi_0 = \phi(t,x_0)$, $\quad \psi_0 = \psi(t,x_0)$, $\quad \theta = \theta(t,x,x_0)$

Derivando rispetto a t,

$$\dot\theta = \frac{1}{|x-x_0|}\left(\dot\phi - \dot\phi_0 - \dot\psi_0\cdot(x-x_0)\right)$$

$$= \frac{1}{|x-x_0|}\left(\underline{f(\phi,t) - f(\phi_0,t)} - \underbrace{f_x(\phi_0,t)\,\psi_0}(x-x_0)\right)$$

In generale

$$f(z,t) - f(z_0,t) = f_x(z_0,t)(z-z_0) + \underline{E(t,z,z_0)}\,(z-z_0) \qquad (3)$$

Da Taylor segue che $E(t,z,z_0)(z-z_0) = o(z-z_0)$

ossia $E(t,z,z_0)\frac{z-z_0}{|z-z_0|} \to 0$ per $z \to z_0$.

$$\underline{E(t,z,z_0) := \int_0^1 \left(f_x(z_0+\tau(z-z_0),t) - f_x(z_0,t)\right)} d\tau.$$

$$\left(f(z,t) - f(z_0,t) = \left(\int_0^1 \frac{d}{d\tau}\underbrace{f(z_0+\tau(z-z_0),t)}\,d\tau\right)\right.$$

$$\left. = \left(\int_0^1 f_x(z_0+\tau(z-z_0),t)\,d\tau\right)(z-z_0)\right)$$

Quindi

$$\dot\theta \overset{(3)}{=} \frac{1}{|x-x_0|}\left(f_x(\phi_0,t)(\phi-\phi_0) + E(t,\phi,\phi_0)(\phi-\phi_0) - f_x(\phi_0,t)\,\psi_0(x-x_0)\right)$$

$$\left(\theta = \frac{\phi-\phi_0-\psi_0(x-x_0)}{|x-x_0|}\right)$$

$$= f_x(\phi_0,t)\,\theta + E(t,\phi,\phi_0)\,\frac{\phi-\phi_0}{|x-x_0|}$$

Integro tra t_0 e t

$$\theta = \int_{t_0}^{t} \underline{f_x(\phi_0,s)}\,\theta(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} E(s,\phi,\phi_0)\frac{\phi-\phi_0}{|x-x_0|}$$

$\phi(s,x)$ $\quad$ $\phi(s,x_0)$

$$|\theta| \le M \left|\int^{t} |\theta(s)|\,ds\right| + \delta$$

$$|\theta| \le M \int_{t_0} |\theta(s)| \ldots$$

con $\delta := \left(\sup_{|t-t_0|\le T} \left| \int_{t_0}^{t} | E(s,\phi,\phi_0)| \right| \right) e^{LT}$

per la Prop. 1.
$|\phi-\phi_0| \le e^{LT}|x-x_0|$

Gronwall $\Rightarrow$

$$|\theta| \le \delta e^{MT}$$

n.b. $\delta \to 0$ se $x \to x_0$.

se $x \to x_0 \Rightarrow \phi \to \phi_0$.

Quindi $x \to \phi(t,x)$ è diff. in x
e il suo Jacobiano $\phi_x(t,x) = \psi(t,x)$.

- Resta da verificare che $x \to \psi(t,x)$ è continua in x.
- Caso C^k.