lunedì 5 ottobre 2020 15:10

LEMMI DI GRONWALL

Primo lemma di Gronwall I intervallo, $\delta \geq 0$, $\alpha > 0$, $g \in C(I, [0,+\infty))$. Assumiamo che $\exists\, t_0 \in I$ t.c.

$$g(t) \leq \delta + \alpha \left| \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \right|. \qquad (1)$$

Allora, $\boxed{g(t) \leq \delta e^{\alpha|t-t_0|}}$, $\forall\, t \in I$.

Dim. Caso $t \geq t_0$. Definiamo

$$G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds.$$

$G \in C^1(I)$ e $G(t_0) = 0$.

Per il T.F.C.

$$G' = g \overset{(1),\, t \geq t_0}{\leq} \delta + \alpha \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds = \delta + \alpha G$$

$$G' \leq \delta + \alpha G \iff G' - \alpha G \leq \delta$$

moltiplico per $e^{-\alpha t}$

$$\left(e^{-\alpha t} G\right)' \leq \delta e^{-\alpha t}$$

Integrando tra t_0 e $t \geq t_0$.

$$e^{-\alpha t} G(t) \overset{G(t_0)=0}{\leq} \delta \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha s}\,ds = \frac{\delta}{\alpha}\left(e^{-\alpha t_0} - e^{-\alpha t}\right)$$

$$G(t) \leq \frac{\delta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-t_0)} - 1\right)$$

$$g \leq \delta + \alpha G$$

$$\frac{g-\delta}{\alpha} \leq G \leq \frac{\delta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-t_0)} - 1\right)$$

$$\implies g \leq \delta e^{\alpha(t-t_0)} = \delta e^{\alpha|t-t_0|}.$$

Altro caso, $t < t_0$.

$$g(t) \leq \delta + \alpha \int_{t}^{t_0} g(s)\,ds, \qquad G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds = -\int_{t}^{t_0} g$$

$$G' = \boxed{g \leq \delta - \alpha G}, \qquad G' + \alpha G \leq \delta$$

Moltiplico per $e^{\alpha t}$

$$(e^{\alpha t} G)' \le \delta e^{\alpha t} \quad \overset{\text{in}}{\Longleftrightarrow} \quad \int_t^{t_0} (e^{\alpha s} G(s))\,ds \le \frac{\delta}{\alpha}(e^{\alpha t_0} - e^{\alpha t})$$

$$- e^{\alpha t} G(t) \le \frac{\delta}{\alpha}(e^{\alpha t_0} - e^{\alpha t})$$

$$-\alpha G \le \delta(e^{\alpha(t_0 - t)} - 1), \quad \delta - \alpha G \le \delta e^{\alpha|t - t_0|}$$

$$\Longrightarrow \quad g \le \delta e^{\alpha|t - t_0|}. \quad \blacksquare$$

Secondo lemma di Granwall (forma differenziale)

Sia I un intervallo, $v \in C^1(I, \mathbb{R})$ e t.c.

$$\underline{v' \le \alpha |v|}, \quad \forall t \in I, \quad \text{per una opportuna } \underset{\text{costante}}{\underline{\alpha}} > 0.$$

Sia $t_0 \in I$.

$(\cdot)$ Se $v(t_0) \le 0 \Longrightarrow v(t) \le 0, \ \forall t \ge t_0$.

$(\cdot\cdot)$ Se $v(t_0) \ge 0 \Longrightarrow v(t) \ge 0, \ \forall \underline{t \le t_0}$.

$(\cdot) \Longrightarrow (\cdot\cdot)$

Poniamo sia vero il lemma nel caso $(\cdot)$ per una funzione $w(t)$. Definisco $w(t) = -v(t_0 - t)$,

$$\underline{w'} = v'(t_0 - t) \le \alpha |v(t_0 - t)| = \alpha |w(t)|$$

$$\underline{w(0) = -v(-t_0) \le 0} \overset{(\cdot)}{\Longrightarrow} w(t) \le 0 \ \forall t \ge 0$$

$$-v(t_0 - t) \le 0 \quad \forall t \ge 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$v(t_0 - t) \ge 0 \quad \forall \underline{t \ge 0}$$

$$\underline{v(t) \ge 0 \quad \forall t \le t_0}$$

---

dim. $(\cdot)$ Per assurdo, supponiamo $\exists\, t_1 \in I$ t.c. $t_1 > t_0$

$\underline{v(t_1) > 0}$.

$$\tau := \sup \underbrace{\{ t \in I, t \le t_1 \mid v(t) \le 0 \}}_{t_0 \in}.$$

$v(\tau) = 0$ e $v(t) > 0 \ \forall t \in J := (\tau, t_1]$

$(\tau < t_1)$.

$v' \le \alpha v$, su J (su J $v > 0$, $|v| = v$)

$v' - \alpha v \le 0$, $(e^{-\alpha t} v)' \le 0$ su J

si integra tra τ e $t_1 \in J$:

$$\cancel{e^{-\alpha t_1}} v(t_1) \leq 0 \quad \text{contraddizione.} \ \blacksquare$$

Due Conseguenze dei lemmi di Gronwall.

Sistemi di EDO.

$u = (u_1, \dots, u_n)$, $u' := (u_1', \dots, u_n')$.

$$(2) \begin{cases} u' = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

sol. di classe C^1.

Oss. (2) è equivalente

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(s),s)\,ds$$

(H)

$f: D \times I \to \mathbb{R}^n$

D è un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$

I è un intervallo di $\mathbb{R}$.

$f \in C(D \times I, \mathbb{R}^n)$ e uniform. LIPSCHITZIANA su D unif. in t

$(\exists L > 0 \mid |f(u,t) - f(v,t)| \leq L|u - v| \quad \forall u,v \in D \quad \forall t \in I)$

norma fissata in $\mathbb{R}^n$

Corollario Assumiamo (H). Allora, se u_1 e u_2 sono soluzioni di (2) $\Rightarrow u_1(t) \equiv u_2(t)$, $\forall t \in I$.

Dim. $g(t) = |u_1(t) - u_2(t)|$, $t \in I$.

$$0 \leq g, \quad g(t_0) = 0, \quad g(t) = \left| \int_{t_0}^{t} (f(u_1, s) - f(u_2, s))\,ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(u_1(s), s) - f(u_2(s), s)|}\,ds \right|$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} |u_1(s) - u_2(s)|\,ds = L \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

$$\Rightarrow g(t) \leq L \left| \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \right|$$

$f \equiv 0$.

$$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} g \equiv 0 \quad \text{ossia} \quad u_1(t) = u_2(t), \ \forall t \in I. \ \blacksquare$$

Corollario del secondo lemma di Gronwall ("teorema di confronto per funzioni scalari (n=1) del primo ordine")

I un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $M > 0$ e $f, g \in C([-M, M] \times I)$, g unif. Lip. in u su $[-M, M] \times I$.

Siano u e v risp. una sottosoluzione e una soprasoluzione di:

$$u' \leq f(u,t)$$

$$v' \geq g(v,t)$$

e $f(u(t),t) \leq g(u(t),t)$. e $\underbrace{|u(t)|, |v(t)| \leq M \quad \forall t \in I}_{(3)}$

Allora se $u(t_0) \leq v(t_0) \Longrightarrow u(t) \leq v(t) \quad \forall\, t \geq t_0$

$[\; u(t_0) \geq v(t_0) \Longrightarrow u(t) \geq v(t), \quad \forall\, t \leq t_0 \;]$

Dim.

Sia L la cost. di Lip. di g rispetto a u in $I \times [-M, M]$

$$u' - v' \leq f(u,t) - g(v,t) \overset{(3)}{\leq} g(u,t) - g(v,t)$$

$$\leq |g(u,t) - g(v,t)| \leq L|u-v|$$

$\overset{\text{lemma 2}}{\Longrightarrow}$ tesi. $\boxtimes$