venerdì 6 novembre 2020 16:13

Metodo di D'Alembert di RIDUZIONE dell'ORDINE

$L[u] = 0 \qquad L := D_t^2 + p_1(t) D_t + p_0(t)$

Supponiamo di conoscere una soluzione u di $L[u]=0$.

$t \in I \mapsto u(t) \neq 0$, I intervallo.

Ansatz: cerco una soluzione $v(t) = u(t)\, z(t)$

(variante del metodo della variazione delle costanti)

$$L[v] = \ddot{v} + p_1 \dot{v} + p_0 v =$$

$$= \ddot{u} z + 2\dot{u}\dot{z} + u\ddot{z} + p_1(\dot{u}z + u\dot{z}) + p_0 uz$$

$$= z\, \underbrace{L[u]}_{0} + 2\dot{u}\dot{z} + u\ddot{z} + p_1 u \dot{z}$$

$$= u\ddot{z} + (2\dot{u} + p_1 u)\dot{z} = 0$$

$\Updownarrow$

$w := \dot z$

$$u\,\dot w + (2\dot u + p_1 u)\, w = 0.$$

$u(t) \neq 0$ su I $\Longrightarrow$ $\Updownarrow$

$$\longrightarrow \dot w + b(t)\, w = 0.$$

con $b(t) := \dfrac{2\dot u + p_1 u}{u}$

$$e^{B(t)}\,\dot w + b(t)\, e^{B(t)}\, w = 0 \qquad B(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\,ds$$

$$\| \qquad\qquad t_0 \in I.$$

$$\left(e^{B(t)}\, w(t)\right)' = 0.$$

$$e^{B(t)}\, w(t) = w(t_0)$$

$$w(t) = c\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{2\dot u + p_1 u}{u}} \qquad (c = w(t_0))$$

$$e^{-2\int_{t_0}^{t} \frac{\dot u}{u}\,ds} = e^{-2\log\frac{u}{u(t_0)}}$$

$u \in C^2$
$u(t) \neq 0.$
$u(t_0)$ e $u(t)$ hanno lo stesso segno $\forall t \in I$.

$$= \left(\frac{u(t_0)}{u(t)}\right)^2$$

$$w(t) = C\, e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(s)\,ds.}$$

$$w(t) = \frac{\quad}{u^2} e \quad \text{[cut off]}$$

$$\Rightarrow \quad z = c \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} p_1(\tau)\,d\tau}}{u^2(s)}\, ds.$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = c\, u(t) \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} p_1(\tau)\,d\tau}}{u^2(s)}\, ds.$$

e $L[v]=0$.

Quindi
$$\boxed{v(t) := u(t) \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-\int_{t_0}^{s} p_1(\tau)\,d\tau}}{u^2(s)}\, ds}$$

è soluzione di $L[v]=0$.

Es. v e u sono lin. indip.

Es. Trovare la soluzione generale di

$$\ddot{x} - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{1}{t^2}x = 0 \qquad t>0.$$

Cerchiamo una soluzione della forma t^a

$$\quad t^{a-2} \quad t^{a-1} \quad t^a$$

$$(t^a)'' = a(a-1)t^{a-2} - \frac{1}{t}a t^{a-1} + \frac{1}{t^2} t^a$$

$$= t^{a-2}\left(a(a-1) - a + 1\right) = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a-1)^2 = 0. \quad a = 1.$$

(N.B. $\ddot{x} + \frac{\alpha}{t}\dot{x} + \frac{\beta x}{t^2} = 0$, α, β cost. $t > 0$

$t^2\ddot{x} + \alpha t \dot{x} + \beta x = 0.$

$$t^{a-2}\left(a(a-1) + \alpha a + \beta\right) = 0$$

$$a^2 + (\alpha-1)a + \beta = 0.$$

$$a_{\pm} = \frac{(1-\alpha) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}$$

$(\alpha-1)^2 \neq 4\beta$ abbiamo due soluz. indip

$$t^{c+id} = t^c \, t^{id} = t^c e^{id \log t}$$

$$t^c \cdot \left(\cos(d \log t) + i \sin(d \log t)\right)$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{1}{t^2}x = 0.$$

$x(t) = t$ è soluzione.

$v(t) = z \cdot t \qquad \ddot{v} = \ddot{z}t + 2\dot{z}, \quad \dot{v} = \dot{z}t + z$

$$L[v] = \ddot{z}t + 2\dot{z} - \frac{1}{\cancel{t}}\cancel{(\dot{z}t + z)} + \cancel{\frac{1}{t^2}zt} = 0$$

$$= \ddot{z}t + \dot{z} = 0$$

$w = \dot{z} \quad \rightarrow \quad \dot{w}t + w = 0 \qquad \frac{\dot{w}}{w} = -\frac{1}{t}$

$\dot{w} + \frac{1}{t}w = 0.$

$w = \frac{1}{t}$

$\dot{z} = \frac{1}{t} \qquad z = \lg t$

$$\boxed{v = t \lg t.}$$

$x(t) = c_1 t + c_2 t \lg t, \quad t > 0.$

Equazione di Eulero

$$(*) \qquad a t^2 \ddot{x} + b t \dot{x} + c x = 0 \quad , \; a, b, c \in \mathbb{R}, \; t > 0$$
$$a \neq 0.$$

Suggerimento: cambio di variabile $t = e^s$, $t(s) = e^s$, $s(t) = \log t$ $\left(\begin{array}{l} t' = t \\ t'(s) = t(s). \end{array} \right)$

$s = \log t.$

$$X(s) = x(t(s)) \quad , \quad x(t) = X(s(t)) \quad , \quad (\;)' = D_s.$$

$$X'(s) = \dot{x} t \quad , \quad X'(s(t)) = \dot{x}(t)\, t$$

$$X''(s) = (\dot{x} t)' = \ddot{x} t^2 + \dot{x} t \qquad \ddot{x} t^2 = X'' - \dot{x} t$$

$$D_s \dot{x}(t(s)) = \ddot{x}(t(s))\, t'(s) = \ddot{x} t$$

$$a t^2 \ddot{x} + b t \dot{x} + c x = 0$$

$$a(\ddot{X} - \dot{x}t) + b t \dot{x} + cx = 0$$

$$aX'' + (b-a)\underbrace{t\dot{x}} + cx = 0.$$

$$\boxed{aX'' + (b-a)X' + cX = 0.}$$

$$e^{\lambda s} = (e^s)^\lambda = t^\lambda$$

<u>Es.</u> Risolvere l'equazione di Eulero

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

$\omega = 0$

$t\ddot{x} + \dot{x} = 0.$

$$X'' + \omega^2 X = 0$$

$X'' = 0 \quad X = s \;,\; X = 1$

$$X = c_1 \cos(\omega s) + c_2 \sin(\omega s)$$

$X(t) = \log t \;,\; = 1$

$$\underline{x(t) = X(\log t)}$$

$$x(t) = c_1 \cos(\omega \log t) + c_2 \sin(\omega \log t)$$

Oss. Eq.ne di Eulero non omogenea

$$a t^2 \ddot{x} + b t \dot{x} + c x = h(t)$$

$$a X'' + (b-a) X' + c X = h(e^s) \quad , \text{ etc.}$$

Oss. $a \ddot{x} + b \dot{x} + c x = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$x = e^{\lambda t}$ $\qquad a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$.

se $\Delta = 0$. $\quad b^2 = 4ac$.

$\lambda = -\frac{b}{2a} \qquad e^{-\frac{b}{2a} t}$.

Si potrebbe usare il metodo di D'Alembert.

Es. 23 [6.5.2]

Trovare $k \in \mathbb{R}$ | tutte le soluzioni di
$\ddot{x} + 2k\dot{x} + 2k^2 x = 0$ tendano a 0 per $t \to +\infty$.

R. $k > 0$