ESERCIZI

mercoledì 7 ottobre 2020 16:28

Es 6 Risolvi $\dot{x} + (t \sin t)x = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\frac{\pi}{2} = t_0$

$\dot{A}(t) = t \sin t$.

$$e^{A(t)}\dot{x} + (t \sin t)\, e^{A(t)} x = 0$$

$$\left(x e^{A(t)}\right)' = 0$$

$$\int t \sin t = -t\cos t + \int \cos t = -t \cos t + \sin t$$

$$A(t) := \sin t - t\cos t$$

Integrando tra $\frac{\pi}{2}$ e t $\qquad x(t)\, e^{A(t)} = e$

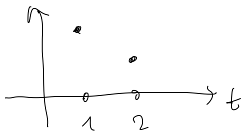
$$x(t) = e^{t\cos t - \sin t + 1}$$

Altro modo: $x(t_0) \neq 0$, in un intorno di t_0 $x(t) \neq 0$.

$$(\log x)' = \frac{\dot{x}}{x} = -t \sin t \quad \text{etc.}$$

Es 8 è un problema al contorno (Boundary Value Problem)

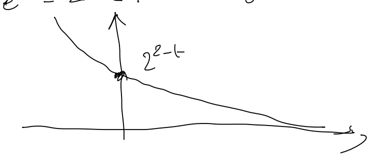
Trova $k \in \mathbb{R}$ $\Big|$ $\begin{cases} \dot{x} + kx = 0 \\ x(1) = 2 \\ x(2) = 1 \end{cases}$



la soluzione generale $x(t) = c\, e^{-kt}$

$$\begin{cases} c e^{-k} = 2 \\ c e^{-2k} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2e^{+k} \\ 2e^{-k} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow e^{k} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ k = \log 2 \end{cases}$$

$$x(t) = 4\, 2^{-t} = 2^{2-t}.$$



Es 10 $\forall x_0$ la soluzione di $\begin{cases} \dot{x} - x = h \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ è t.c. $\lim_{t \to -\infty} x(t) = -h$.

$$\left(x e^{-t}\right)' = e^{-t}(\dot{x} - x) = h e^{-t}$$

$$x e^{-t} - x_0 = h\left(1 - e^{-t}\right)$$

$$x = x_0 e^{t} + h\left(e^{t} - 1\right) \xrightarrow[t \to -\infty]{} -h.$$

Es 25 Sia x_1 una soluzione di $\dot{x} + p(t)x = q(t)$.

Dimostra che la soluzione generale di $\nearrow$ è

$$x(t) = x_1(t) + \underbrace{c\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\, ds}}_{\text{è la soluzione generale dell'equazione omogenea.}}$$

$$L u = 0 \quad , \quad \underline{L u_0 = f} \qquad L(u + u_0) = f$$

operatore differenziale $\qquad$ assegnato

Nel nostro caso

$$L := D_t + p(t) \qquad \underline{L x := \dot{x} + p(t)\, x .}$$

$$f = q(t) , \quad u = c\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} , \quad L u = 0 .$$

ES 26 (Attenzione il testo è sbagliato).

Usando l'ES. 25 trova la soluzione generale di $\dot{x} - x = \cos t - \sin t$ $(*)$ (non $\cos x - \sin t$)

La sol. generale dell'omogenea è $x(t) = c e^t$,

$x(t) = \sin t$ è una soluzione di $(*)$

$\implies$ la sol. generale è data da $\underline{c} e^t + \sin t$

ES DISCUTERE in dettaglio il problema di Cauchy

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - c =: f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

in particolare determinare l'intervallo $I(x_0; t_0)$ massimale di esistenza della soluzione.

Oss. $\underline{\dot{u} = f(u)}$ $\quad u \in \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Se $u(t)$ è soluzione lo è anche $v(t) = \underline{u(t - t_0)}$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

$\dot{u}(t - t_0) = f(u(t - t_0))$

Se pongo $y(t) := x(t - t_0)$ allora y soddisfa $\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = x_0 . \end{cases}$

Posso studiare

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = \underline{x(1-x) - c} = -(x^2 - x + c) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$f(x) = x(1-x) - c = -\left(\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + c - \tfrac{1}{4}\right)$$

$\underline{y := x - \frac{1}{2}}$ $\qquad \begin{cases} \dot{y} = \dot{x} = -(y^2 - a) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $\boxed{a := \frac{1}{4} - c}$, $\underline{y_0 = x_0 - \frac{1}{2}}$.

$$(4) \begin{cases} \dot{y} = -(y^2 - a) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{CASO 1}}$

Equilibri del sistema $\iff \dot{y} = 0 . \iff y(t) \equiv y_0$

quindi $\iff y_0^2 = a \geq 0$.

è necessario.

Si ha un equilibrio (soluzione stazionaria) $\iff a \geq 0$ e $y_0 = \sqrt{a}$.

In tal caso l'intervallo

$y(t) \equiv y_0$ è l'unica soluzione. In tal caso l'intervallo massimale di esistenza della soluzione di (4) $J(y_0, a)$ è dato da $J(\sqrt{a}, a) = \mathbb{R}$, $(a \geq 0)$.

Da ora in poi supponiamo $y_0^2 \neq a$ (per t piccoli). Per t piccoli $y(t)^2 \neq a$. Quindi (4) è equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{\dot y}{y^2 - a} = -1 \\ y(0) = y_0 . \end{cases} \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\xi^2 - a} = -t$$

Vari casi.

$\boxed{\text{CASO 2}}$ $\quad a < 0$ $\quad (y_0^2 \neq a)$ automaticamente. $\quad a = -\alpha^2$, $\alpha > 0$, $\alpha = \sqrt{-a} > 0$.

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\xi^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\alpha} \int_{y_0}^{y} \frac{d\frac{\xi}{\alpha}}{\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\operatorname{arctg} \frac{\xi}{\alpha}\right]_{y_0}^{y} = \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{y_0}{\alpha}\right) = -t$$

Usiamo $\quad \operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

$$\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{y}{\alpha}}_{a} - \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{y_0}{\alpha}}_{b} = -\alpha t$$

$$-\operatorname{tg} \alpha t = \left(\frac{y}{\alpha} - \frac{y_0}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{y y_0}{\alpha^2}\right)^{-1}$$

$$\underbrace{\operatorname{tg} \alpha t}_{\tau} = \frac{y_0 - y}{\alpha\left(1 + \frac{y y_0}{\alpha^2}\right)} = \alpha \frac{y_0 - y}{\alpha^2 + y y_0}$$

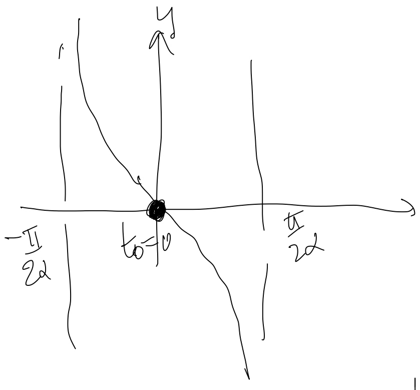
$$(\alpha^2 + y y_0)\tau = \alpha y_0 - \alpha y \qquad y_0 \tau y + \alpha y = \alpha y_0 - \alpha^2 \tau$$

$$y = \frac{\alpha y_0 - \alpha^2 \tau}{\alpha + y_0 \tau} = \frac{\alpha y_0 - \alpha^2 \operatorname{tg} \alpha t}{\alpha + y_0 \operatorname{tg} \alpha t} \qquad (\alpha > 0,\ a = -\alpha^2)$$

$$J(y_0, -\alpha^2) \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha t < \frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2\alpha} < t < \frac{\pi}{2\alpha}$$

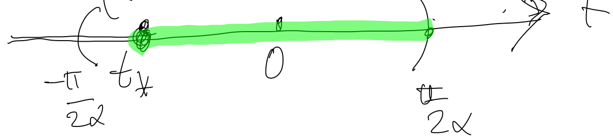
$$\boxed{\alpha + y_0 \operatorname{tg} \alpha t \neq 0}$$

CASO 2.1 $\quad y_0 = 0$, $\quad y = -\alpha \operatorname{tg} \alpha t$, $\quad J(0, -\alpha^2) = \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$



Caso 2.2 $\quad y_0 \neq 0 \qquad \operatorname{tg} \alpha t \neq -\frac{\alpha}{y_0} \qquad \alpha t_* = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\alpha}{y_0}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{y_0}$

$$t_* = -\frac{1}{\alpha}\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{y_0}}_{\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \boxed{t \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)}$$



$$t_* \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$$

$-\frac{\pi}{2\alpha} < t_* < 0 \qquad J(y_0, -\alpha^2) = \left(t_*, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$

$0 < t_* < \frac{\pi}{2\alpha} \qquad J(y_0, -\alpha^2) = \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, t_*\right)$

etc.

Es. Completare trovando $J(y_0, \alpha) = (T_-, T_+)$ e il $\lim_{t \to T_\pm} y(t)$.