lunedì 7 dicembre 2020 16:04

Gli esercizi della § 9.7 (Es 1 – 21)

Abbiamo dimostrato che se $f \in C^1(D \times I, \mathbb{R}^n)$ con $D = \{|x - x_0| \le r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $I = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \le T\}$.

Allora $x \to \phi(t,x)$ è differenziabile in x e il suo Jacobiano ϕ_x verifica l'equazione differenziale

$$(EV) \begin{cases} \dot{\phi}_x(t,x) = f_x(\phi(t,x),t)\, \phi_x(t,x) \\ \phi_x(t_0,x) = x \end{cases}$$

$\phi_x : (I \times D) \to Mat(n \times n)$ è continua

$t \to \phi_x(t,x) = X(t) = X(t; x)$ verifica.
parametri

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t;x)\, X \\ X(t_0) = I \end{cases}$$

Per Picard - Lindelöf

$X = \lim_{n \to \infty} X_n$ uniforme cioè

$$\sup_{\substack{t \in I \\ x \in D}} \| X - X_n \| \to 0$$

parametri

$\Rightarrow X \in C(I \times D, Mat(n \times n))$

essendo limite uniforme di funzioni continue.

$$\underline{X}_0 := I$$

$$\longrightarrow \underline{X}_1(t) := I + \int_{t_0}^{t} \underline{A}(s,x)\, \underline{X}_{n-1}(s,x)\, ds.$$

<u>etc.</u>

Quindi $\Phi_x(t,x)$ continua $\Rightarrow$ $\Phi \in C^1$.

<u>Prop.</u> $f \in C^k \Rightarrow \Phi \in C^k$.

<u>Dim.</u> $k=1$, fatto.

$k \geq 2$.

Per induzione

Assumiamo che $\Phi \in C^{k-1}$ se $k-1 \geq 1$.

Per il teorema C^1 abbiamo che

$$\longrightarrow \dot{\Phi}_x = \underline{f_x}(\underline{\Phi(t,x)},t)\,\underline{\Phi_x}$$

$\underline{X(t) = \Phi_x(t,x)}$ mentre $\dot{X} = F(X,\underline{t})$

F dipende in modo C^∞ da X

ed $\underline{è\ C^{k-1}}$ in t $\Rightarrow$ C^{k-1} in (X,t)

$\Rightarrow$ $\Phi_x \in C^{k-1} \Leftrightarrow \Phi \in C^k$. ∎

<u>STABILITA' di p.ti di equilibrio</u>

$\{ \dot{x} = f(x,t)$ $\qquad$ $\underline{f \in C^1}$.

$\mid x(t_0)=x_0$

$$\sup_{|t-t_0|\le T} \left| \phi(t,x) - \phi(t,x_0) \right| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

Segue dalla uniforme continuità di $\phi : \underbrace{I\times D}_{\text{compatto}} \to D$

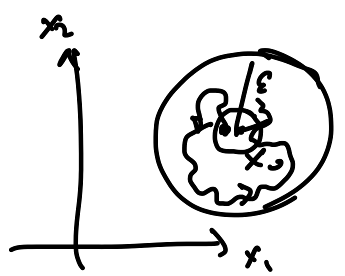
$\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta:$

$$|\phi(t,x) - \phi(s,x_0)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |(t,x)-(s,x_0)|<\delta$$

Def: Stabilità in senso di Lyapunov di un pto di equilibrio x_0.

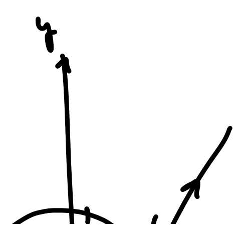
$$\begin{cases} \dot x = f(x,t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases} \qquad x_0 \text{ equilibrio} \iff f(x_0,t)=0, \; \forall t.$$

(1) x_0 è stabile (nel futuro) (secondo Lyapunov) se $\forall \varepsilon>0$
$\exists \varepsilon>\delta>0 \mid |\phi(t,x)-x_0|<\varepsilon \quad \forall\, t\ge 0$ e $\forall\, x\in B_\delta(x_0)$ (SL)

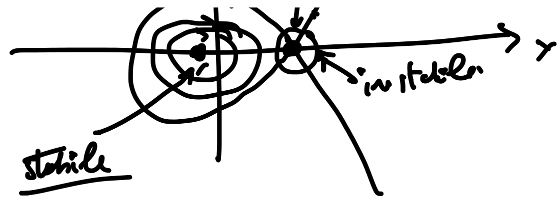


(2) x_0 è asintoticamente stabile (nel futuro) $\underbrace{\wedge}_{\text{se è stabile (nel senso (1)) e}}$ se $\exists\, \delta>0 \mid$
$\forall\, x\in B_\delta(x_0) \; \lim_{t\to+\infty} \phi(t,x) = x_0.$ (SA)

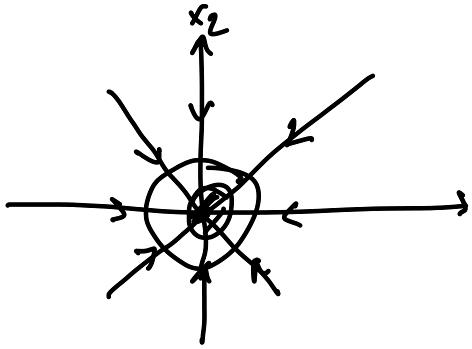
Esempi.



$\frac{1}{2}y^2+V(x)$



$$\begin{cases}\dot x_1 = -x_1\\ \dot x_2 = -x_2\end{cases} \qquad \dot x = -x, \; x\in\mathbb{R}^2$$



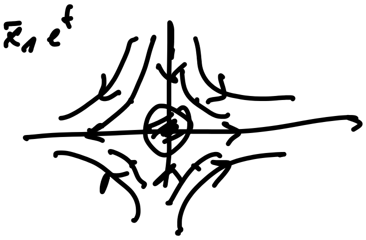
$$\begin{cases} x_1 = e^{-t}\bar x_1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\\ x_2 = e^{-t}\bar x_2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0. \end{cases}$$

$x_2 = x_1 \dfrac{\bar x_2}{\bar x_1}$ se $\bar x_1 \neq 0$.

$\underline{x_1 = 0.}$

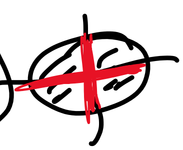
(0,0) è asint. stabile

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_1\\ \dot x_2 = -x_2\end{cases} \qquad x_1 = \bar x_1 e^{t}$$



(0,0) è instabile

$\forall \; x \in B_\delta((0,0)) \setminus (\{x_1=0\}\cup\{x_2=0\})$



$\|\Phi(t,x)\| \xrightarrow[\substack{t\to+\infty\\ t\to-\infty}]{} +\infty$

Stabilità per sistemi lineari a coeff. costanti

la soluzione è data $\underline{e^{At}x_0}$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad A \in M(n)$$

Per Jordan $\exists$ una matrice invertibile U |

$\longrightarrow$ $U A U^{-1} = J$ con J in forma di Jordan

ossia $J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$ con $J_k = \lambda_k I + N_{n_k}$

$$J_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}}_{n_k}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \dot{x} = Jx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$A = U^{-1} J U$$

$$\exp(At) = U^{-1} \underline{\underline{\exp(Jt)}}\, U$$

$$\exp Jt = \exp(\lambda t I + tN) =$$

$$= \exp(\lambda t I)\, \exp(tN)$$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

se $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow \exp(\lambda t I) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \quad \alpha < 0$$

In generale se $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$

$\Rightarrow x = 0$ è asintoticamente stabile.

(se $M(t)$ e $\|M(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Rightarrow M(t)x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$|M(t)x| \leq \|M(t)\|\,|x| \to 0$)

se $\exists$ un autovalore λ con $\underbrace{\mathrm{Re}\,\lambda}_{\alpha} > 0.$

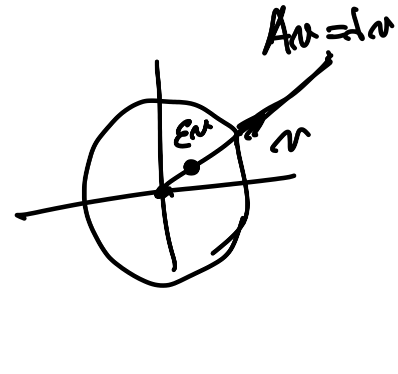
$\Rightarrow$ l'origine è instabile.

Quindi $\exists\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ($|v| = 1$):

$$Av = \lambda v$$

$\dot{x} = Ax$

$x(0) = \varepsilon v$ $\qquad \varepsilon > 0.$



$$x(t) = \varepsilon v e^{\lambda t}$$

$x(0) = \varepsilon v$

$$\dot{x}(t) = \varepsilon v \lambda e^{\lambda t} = \varepsilon e^{\lambda t} Av = A(\varepsilon e^{\lambda t} v)$$
$$= Ax(t)$$

$|x(t)| = \varepsilon e^{\alpha t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$

Esempi con autovalori a parte reale nulla.

$\lambda = 0, n = 1$, $\dot{x} = 0$, $x(t) \equiv x_0$. $x_0 = 0$

e qualunque x_0 è un pto di equilibrio stabile (non asint. stabile).

$n \geq 2$ $\quad Re\,\lambda = 0$, $Im\,\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\exp\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i \sin t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ogni soluzione è della forma

$x(t) = a \cos t + b \sin t$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è stabile

ma non asintoticamente stabile.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp At = \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \dot{x}_1 = x_2 \right.$ $\qquad \left\{ x_1 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 t \right.$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\phi^t(0, \varepsilon) = (\underline{\varepsilon t}, \varepsilon) \qquad \| (\varepsilon t, \varepsilon) \| \geq \varepsilon t \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

$\varepsilon > 0$. $\qquad$ $\varepsilon > 0$.

Se $\exists$ un blocco di Jordan con $\operatorname{Re} \lambda = 0$

e $g(\lambda) < a(\lambda) \implies x = 0$ <u>è instabile</u>.